Phase-field 微視力学に基づく
弾性歪エネルギーの評価

by T.Koyama

１．変数設定

$\mathbf{r}$： 位置ベクトル

$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$： 弾性歪

$\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})$： 拘束歪（全歪）

$\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})$： eigen 歪

$\sigma_{ij}(\mathbf{r})$： 弾性応力

C_{ijkl}： 弾性率

F_{int}： 外力と eigen 歪場との相互作用エネルギー

E_{inh}： 外力と内部不均一場（elastic inhomogeneity）との相互作用エネルギー

$\sigma_{ij}^{A}(\mathbf{r})$： 外部応力

$\varepsilon_{kl}^{A}(\mathbf{r})$： 外部応力に起因する弾性歪成分

X_i^A： 外部応力に起因する物体の表面力

σ_{ij}^{Inh}： inhomogeneousな析出物が存在することによる応力の変化量

u_i^{Inh}： inhomogeneousな析出物が存在することによる変位の変化量

S_{ijkl}： 弾性コンプライアンス（$S_{ijkl}=C_{ijkl}^{-1}$）

$G_{jk}^{-1}(\mathbf{k})$：$G_{jk}^{-1}(\mathbf{k})\equiv C_{jlmk}k_l k_m$

$\eta(\alpha, p_\alpha, \mathbf{r})$：phase-field 変数

α： phase-field を定義する第一変数（結晶方位や、すべり面番号等）

p_α： phase-field を定義する第ニ変数（バリアント番号や、すべり方向等）

$\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)$：$\alpha$ および p_α によって規定される eigen 歪

$\mathbf{k}$： フーリエ空間の位置ベクトル（波数ベクトル）

$\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})$：$\eta(\alpha, p_\alpha, \mathbf{r})$ のフーリエ変換

$\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})$：$\sigma_{ij}^{0}(\mathbf{r})\equiv C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})$ のフーリエ変換

２．外力下における自由エネルギーについて

外力が存在することによって新たに生じる過剰エネルギーには２種類ある。１つは外力とeigen歪場との相互作用エネルギー F_{int} で、もう１つは地相内にinhomogeneityが存在する場合に生じる外力と内部不均一場との相互作用に起因する弾性歪エネルギー E_{inh} である。まず F_{int} の評価法から説明しよう。まず初めに議論を簡単にするためhomogeneousな場合を考え、内部応力場を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})=\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})-\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\\
&\sigma_{ij}(\mathbf{r})=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{r})\\
&\sigma_{ij,j}=0\\
&\sigma_{ij}n_j=0
\end{aligned}
\tag{2-1}
$$

以上は内部応力場のみに関連する関係式であるので、外力が作用していない状態に対応している。したがって体積力と面積力は伴に０と仮定した。

一方、eigen歪が0で、外部応力のみが存在する場合の内部応力場および歪場を以下のように定義することができる（固溶体における応力場と考えると理解しやすい)。

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij}^A(\mathbf{r}) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^A(\mathbf{r}) \\
&\sigma_{ij,j}^A = 0 \\
&\sigma_{ij}^A n_j = X_i^A
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

以上でAが付いている変数は全て外部応力に関係する項である（ここでも体積力は０と仮定した)。外力下であるので面積力は明らかに存在し、これが X_i^A である。

以上より整合析出物を含む固体に外部応力が作用している状態における全自由エネルギー F は、物体の変位場に因する内部エネルギーおよび面積力に起因する外部からの仕事の和として、次式にて与えられる。

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^A)(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^A) d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{s}} X_i^A (u_i + u_i^A) d\mathbf{S} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A\varepsilon_{ij}^A d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^A d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A\varepsilon_{ij} d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{s}} X_i^A u_i^A d\mathbf{S} - \int_{\mathbf{s}} X_i^A u_i d\mathbf{S}
\end{aligned}
\tag{2-3}
$$

ここで、$\sigma_{ij}(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}^A(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}^A(\mathbf{r}) = \sigma_{kl}^A(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}^A(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ であるから、

$$
\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}^A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}
\tag{2-4}
$$

であり、さらにガウスの定理より導かれる

$$
\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}^A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{s}} \sigma_{ij} u_i^A n_j d\mathbf{S} - \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij,j} u_i^A d\mathbf{r} = 0
\tag{2-5}
$$

を考慮すると、結局

$$
\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}^A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0
\tag{2-6}
$$

であることがわかる。これより式(2-3)は、

$$
F = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A\varepsilon_{ij}^A d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{s}} X_i^A u_i^A d\mathbf{S} - \int_{\mathbf{s}} X_i^A u_i d\mathbf{S}
\tag{2-7}
$$

と表現できる。さらにこの４項目を改めて F_{int} と置く。式(2-2)と(2-6)から、

$$
\begin{aligned}
F_{int} &= -\int_{\mathbf{s}} X_i^A u_i d\mathbf{S} = 0 - \int_{\mathbf{s}} X_i^A u_i d\mathbf{S} \\
&= \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij,j}^A u_i d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{s}} \sigma_{ij}^A u_i n_j d\mathbf{S} \\
&= -\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A(\mathbf{r}) u_{i,j}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\
&= -\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\
&= -\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A(\mathbf{r}) \left\{ \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) \right\} d\mathbf{r} \\
&= -\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}
\end{aligned}
\tag{2-8}
$$

となる。これより、F_{int} が外部応力と内部eigen歪場の相互作用エネルギーであることがわかる。なお、式(2-7)の第１項は内部応力のみが存在する時の弾性歪エネルギー、第２と第３項が外力のみ存

在した時の物体の有する力学的エネルギーである。また式(2-6)のように外部応力σ_{ij}^Aと析出物のみが作る内部応力σ_{ij}は相互作用しない。これはColonnettiの定理と呼ばれる。以上から、Fは

$$F=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^A\varepsilon_{ij}^A d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^A d\mathbf{S}-\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^A\varepsilon_{ij}^0 d\mathbf{r} \tag{2-9}$$

にて与えられる。

次にもう１つの外力との相互作用エネルギーE_{inh}の評価法について説明する。議論を簡単化するため、eigen歪が0でinhomogeneousな析出物を含む固体に外力(面積力)のみが作用している場合を考える。外力のみが存在した時の応力をσ_{ij}^A、および変位をu_i^Aとし、inhomogeneousな析出物が存在することによる応力の変化量をσ_{ij}^{Inh}、および変位の変化量をu_i^{Inh}とする。これより全応力σ_{ij}^{total}および全変位u_i^{total}は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{total}&=\sigma_{ij}^A+\sigma_{ij}^{Inh}\\
u_i^{total}&=u_i^A+u_i^{Inh}\\
\sigma_{ij,j}^A&=\sigma_{ij,j}^{Inh}=0\\
\sigma_{ij}^{total}n_j&=\sigma_{ij}^A n_j=X_i^A
\end{aligned}$$

外力のみの場合も、inhomogeneousな析出物が存在する場合も平衡方程式は満足される。また物体表面における面積力X_i^Aは、両場合において変化していないので、上式の最後の式が成立する。これより全自由エネルギーFは次式にて与えられる。

$$\begin{aligned}
F&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{total}u_{i,j}^{total}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^{total}d\mathbf{S}\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}(\sigma_{ij}^A+\sigma_{ij}^{Inh})(u_{i,j}^A+u_{i,j}^{Inh})d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_i^A(u_i^A+u_i^{Inh})d\mathbf{S}\\
&=\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^A u_{i,j}^A d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^A d\mathbf{S}\right]\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^A u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{Inh}u_{i,j}^A d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{Inh}u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^{Inh}d\mathbf{S}\right]
\end{aligned} \tag{2-10}$$

第１項は外力のみ存在した時の弾性歪エネルギーで、第２項が外力とinhomogeneousな析出物との相互作用エネルギーである。第２項のみをを改めてE_{inh}と書くと、

$$\begin{aligned}
E_{inh}&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^A u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{Inh}u_{i,j}^A d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{Inh}u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^{Inh}d\mathbf{S}\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^A u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^{Inh}d\mathbf{S}\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^{Inh}d\mathbf{S}-\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^{Inh}d\mathbf{S}=-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{s}}X_i^A u_i^{Inh}d\mathbf{S}=-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^A u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}
\end{aligned} \tag{2-11}$$

と変形できる。ここで、

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{Inh}u_{i,j}^{A}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{Inh}u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{Inh}u_{i,j}^{total}d\mathbf{r}=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}(\sigma_{ij}^{total}-\sigma_{ij}^{A})u_{i,j}^{total}d\mathbf{r}$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{s}}(\sigma_{ij}^{total}-\sigma_{ij}^{A})u_{i}^{total}n_{j}d\mathbf{S}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}(\sigma_{ij,j}^{total}-\sigma_{ij,j}^{A})u_{i}^{total}d\mathbf{r}$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{s}}(X_{i}^{A}-X_{i}^{A})u_{i}^{total}d\mathbf{S}-0=0$$

および

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{s}}\sigma_{ij}^{A}u_{i}^{Inh}n_{j}d\mathbf{S}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij,j}^{A}u_{i}^{Inh}d\mathbf{r}=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{s}}X_{i}^{A}u_{i}^{Inh}d\mathbf{S}$$

を用いた。以上からFは、

$$\begin{aligned}F&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}u_{i,j}^{A}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_{i}^{A}u_{i}^{A}d\mathbf{S}+E_{inh}\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}u_{i,j}^{A}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_{i}^{A}u_{i}^{A}d\mathbf{S}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{s}}X_{i}^{A}u_{i}^{Inh}d\mathbf{S}\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}u_{i,j}^{A}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_{i}^{A}u_{i}^{A}d\mathbf{S}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}\end{aligned}\qquad(2\text{-}12)$$

にて与えられる。

さらに等価介在物の概念を用いて、inhomogeneousな応力場をhomogeneousな応力場で再現する等価変態歪ε_{ij}^{0Inh}を導入したとしよう。これはエネルギーの面から言えば、E_{inh}を、F_{int} (ε_{ij}^{0Inh}と外力との相互作用エネルギー)で書き直すことに他ならない。この場合、

$$E_{inh}=-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{s}}X_{i}^{A}u_{i}^{Inh}d\mathbf{S}=-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}=-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}\varepsilon_{ij}^{0Inh}d\mathbf{r}=F_{int}\qquad(2\text{-}13)$$

となるので、$\varepsilon_{ij}^{0Inh}=u_{i,j}^{Inh}$であることがわかる。

最後に式(2-9)と(2-12)より、eigen 歪による内部応力場、外力、および inhomogeneity が存在する場合は、

$$\begin{aligned}F&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}\varepsilon_{ij}^{A}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_{i}^{A}u_{i}^{A}d\mathbf{S}-\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}\varepsilon_{ij}^{0}d\mathbf{r}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}u_{i,j}^{Inh}d\mathbf{r}\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}\varepsilon_{ij}^{A}d\mathbf{r}-\int_{\mathbf{s}}X_{i}^{A}u_{i}^{A}d\mathbf{S}-\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}(\varepsilon_{ij}^{0}+\varepsilon_{ij}^{0Inh})d\mathbf{r}\end{aligned}\qquad(2\text{-}14)$$

となることがわかる（内部応力σ_{ij}とε_{ij}^{0Inh}のカップリング項が生じるが、Colonnetti の定理によりこの項は 0 となっている）。

３. **Phase-field micromechanics** に基づく弾性歪エネルギーの基礎式

弾性歪エネルギーは、

$$
\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}(\mathbf{r})d\mathbf{r} - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{s}} X_i^A \overline{u}_i d\mathbf{S} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}(\mathbf{r})d\mathbf{r} - \sigma_{ij}^A \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})-\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})-\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} - \sigma_{ij}^A \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})-\left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle-\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right]\left[\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r})-\left\langle \varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})\right\rangle-\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})\right]d\mathbf{r} - \sigma_{ij}^A \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})-\left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r})-\left\langle \varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right\}d\mathbf{r} - \sigma_{ij}^A \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})-\left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right]\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})-\left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r})-\left\langle \varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right\}d\mathbf{r} - \sigma_{ij}^A \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r}
\end{aligned}
\tag{3-1}
$$

と表現できる。ここで、

$$
\begin{aligned}
&u_i(\mathbf{r}) = \left\langle u_i(\mathbf{r})\right\rangle + \delta u_i(\mathbf{r}) = \overline{u}_i + \delta u_i(\mathbf{r}) \\
&\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r}) = \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle + \delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r}) \\
&\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\left\{\delta u_{i,j}(\mathbf{r}) + \delta u_{j,i}(\mathbf{r})\right\}, \qquad \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle = \frac{1}{2}(\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{j,i})
\end{aligned}
\tag{3-2}
$$

$$
\frac{1}{V}\int_{\mathbf{s}} X_i^A \overline{u}_i d\mathbf{S} = \frac{1}{V}\int_{\mathbf{s}} \sigma_{ij}^A n_j \overline{u}_i d\mathbf{S} = \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij,j}^A \overline{u}_i d\mathbf{r} + \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}^A \overline{u}_{i,j} d\mathbf{r} = \sigma_{ij}^A \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle
\tag{3-3}
$$

である。C_{ijkl} は弾性率で、ここではまず定数と仮定する。また σ_{ij}^A は外力で位置 $\mathbf{r}$ に依存しない定数と仮定する。$\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})$ は物体内の位置 $\mathbf{r}$ における全歪（拘束歪）で、$\left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle$ はその空間平均値である。$\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})$ は $\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})$ の平均値 $\left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle$ からの変動量で、この変動量分が変位場の勾配から導かれる。$\left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle$ は、物体表面が拘束されていない場合、

$$
\frac{\partial E_{str}}{\partial \left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle} = 0
\tag{3-4}
$$

を満たすように決定される。弾性歪エネルギー式(3-1)において、$\left\langle \varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle$ が関連する項は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle \\
&=\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle+\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle \\
&=\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle d\mathbf{r}-\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle \\
&=\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2}C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle-C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle \\
&=\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2}C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle-C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle-\sigma_{ij}^{A}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle
\end{aligned}
$$

であるので、これを$\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle$で微分して、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_{str}}{\partial\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle}=C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle-C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle-\sigma_{ij}^{A}=0 \\
&C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle=\sigma_{ij}^{A}+C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle \\
&\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle=S_{ijkl}\sigma_{ij}^{A}+\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle \\
&\therefore\ \left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle=S_{klij}\sigma_{kl}^{A}+\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle=S_{ijkl}\sigma_{kl}^{A}+\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle
\end{aligned}
$$

を得る。S_{ijkl} は弾性コンプライアンス（$S_{ijkl}=C_{ijkl}^{-1}$）である。もし外力が存在しなければ、$\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle=\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle$であることがわかる。さらに$\sigma_{ij}^{A}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{A}$にて$\varepsilon_{kl}^{A}$を定義すると、

$$
\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle=S_{ijkl}\sigma_{kl}^{A}+\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle=\varepsilon_{ij}^{A}+\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle \tag{3-5}
$$

を得る。つまり全歪の平均値は、外力のみによる正味の歪量ε_{ij}^{A}と eigen 歪の空間平均値$\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle$の和にて与えられる。さて、これをあらためて式(3-1)に代入すると、

$$
\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\left\langle\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\{\varepsilon_{kl}^{A}+\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\right]d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right\} \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle-\varepsilon_{ij}^{A}\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle-\varepsilon_{kl}^{A}\right]d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}+\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}6) \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

となる。

さて、フックの法則、内部応力の釣り合い条件、および物体表面における面力と表面における応力の釣り合い条件

$$
\sigma_{ij}(\mathbf{r})=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{r})=C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})-\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\}=C_{ijkl}\left[\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle+\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})-\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right] \qquad (3\text{-}4)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_{ij,j}(\mathbf{r})=0 \\
&\sigma_{ij}(\mathbf{r}_S)n_j(\mathbf{r}_S)=X_i^{A}(\mathbf{r}_S)
\end{aligned}\right. \qquad (3\text{-}5)
$$

を仮定すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{s}}\sigma_{ij}(\mathbf{r}_S)\delta u_i(\mathbf{r}_S)n_j(\mathbf{r}_S)d\mathbf{S}-\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij,j}(\mathbf{r})\delta u_i(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}}C_{ijkl}\left[\left\langle\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle+\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})-\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right]\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{s}}X_i^{A}(\mathbf{r}_S)\delta u_i(\mathbf{r}_S)d\mathbf{S} \\
&\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}}C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}}C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{s}}X_i^{A}(\mathbf{r}_S)\delta u_i(\mathbf{r}_S)d\mathbf{S} \\
&\therefore\ \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}}C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}}C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{s}}X_i^{A}(\mathbf{r}_S)\delta u_i(\mathbf{r}_S)d\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

であることがわかる。これを式(3-6)に代入して、

$$
\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{s}} X_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})\delta u_{i}(\mathbf{r}_{S})d\mathbf{S} \qquad (3\text{-}6) \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&\quad +\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}\varepsilon_{ij}^{A}d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{s}} X_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})\delta u_{i}(\mathbf{r}_{S})d\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

を得る。さらに、

$$
-\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij}^{A}\varepsilon_{ij}^{A}d\mathbf{r}=-\frac{1}{V}\left\{\int_{\mathbf{s}}\sigma_{ij}^{A}(\mathbf{r}_{S})u_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})n_{j}(\mathbf{r}_{S})d\mathbf{S}-\int_{\mathbf{r}}\sigma_{ij,j}^{A}(\mathbf{r})u_{i}^{A}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\right\}=-\frac{1}{V}\int_{\mathbf{s}} X_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})u_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})d\mathbf{S}
$$

および、

$$
\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{s}} X_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})\delta u_{i}(\mathbf{r}_{S})d\mathbf{S}=0
$$

（この項は物体表面における外力に起因する面力と全歪変動量に起因する変位変動から構成される仕事であるが、定義から $\int_{\mathbf{s}}\delta u_{i}(\mathbf{r}_{S})d\mathbf{S}=0$ であり、$X_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})$ と $\delta u_{i}(\mathbf{r}_{S})$ が独立であれば、統計的にこの項は０となると考えられる。また、もともと物体が十分に大きいと仮定すると表面項は体積に対して無限小となり省略することができる。）

を考慮して、最終的に弾性歪エネルギーは、

$$
\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \qquad (3\text{-}7) \\
&\quad +\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\frac{1}{V}\int_{\mathbf{s}} X_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})u_{i}^{A}(\mathbf{r}_{S})d\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

にて与えられる（式(2-9)と対応している）。特に最後の２項は外力のみに関係したエネルギーであるので、これを改めてエネルギーの基準にとり、弾性歪エネルギーを、

$$
\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

と表現する場合もある。

さてこの式を逆空間にて表現しよう。先に結果を示す。

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k}) = \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{kr})d\mathbf{r} \\
&G_{jk}^{-1}(\mathbf{k}) \equiv C_{jlmk}k_l k_m
\end{aligned}
\tag{3-8}
$$

を定義すると、弾性歪エネルギー式(3-7)は、

$$
\begin{aligned}
E_{str} = &\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r}) - \left\langle \varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r}) \right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r}) - \left\langle \varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r}) \right\rangle\right]d\mathbf{r} - \sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_i G_{jk}(\mathbf{k})k_l \tilde{\sigma}_{kl}^{0^*}(\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r} - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{s}} X_i^{A}(\mathbf{r}_S)u_i^{A}(\mathbf{r}_S)d\mathbf{S}
\end{aligned}
\tag{3-9}
$$

にて与えられる。以下この式の定式化について説明する。まず eigen 歪は、

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r}) &= \sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\eta(\alpha, p_\alpha, \mathbf{r}) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\int_{\mathbf{k}}\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&= \int_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}
\end{aligned}
\tag{3-10}
$$

となり、また拘束歪は、

$$
\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}} C_{pqmn}\{k_q G_{pl}(\mathbf{k})k_k + k_q G_{pk}(\mathbf{k})k_l\}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{mn}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&= \int_{\mathbf{k}} C_{pqmn}k_q G_{pl}(\mathbf{k})k_k\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{mn}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}
\end{aligned}
\tag{3-11}
$$

と表現されるので、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\int_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\right\}\left\{\int_{\mathbf{k}} k_q G_{pl}(\mathbf{k})k_k C_{pqmn}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{mn}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\right\}d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\int_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\right\}\left\{\int_{\mathbf{k}} k_q G_{pl}(\mathbf{k})k_k C_{pqmn}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{mn}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\exp(i\mathbf{kr})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\right\}d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\int_{\mathbf{k}'} k_q G_{pl}(\mathbf{k})k_k C_{pqmn}C_{ijkl}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{mn}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\right\}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k}')\right\}\left[\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\exp\{i(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\mathbf{r}\}d\mathbf{r}\right]\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\int_{\mathbf{k}'} k_q G_{pl}(\mathbf{k})k_k C_{pqmn}C_{ijkl}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{mn}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\right\}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k}')\right\}\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}} k_q G_{pl}(\mathbf{k})k_k\left\{\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}C_{pqmn}\varepsilon_{mn}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})\right\}\left\{\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\,\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, -\mathbf{k})\right\}\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{pq}^{0}(\mathbf{k})k_q G_{pl}(\mathbf{k})k_k\tilde{\sigma}_{kl}^{0}(-\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_j G_{il}(\mathbf{k})k_k\tilde{\sigma}_{kl}^{0}(-\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_i G_{jk}(\mathbf{k})k_l\tilde{\sigma}_{kl}^{0}(-\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}
\end{aligned}
$$

であり、

$$\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}} \tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_i G_{jk}(\mathbf{k})k_l \tilde{\sigma}_{kl}^{0}(-\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tag{3-12}$$

であることがわかる。式(3-9)は式(3-7)に上式を代入した結果である。ここで、

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{00}(\alpha, p_\alpha)\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k}) \tag{3-13}$$

である。先に式(3-8)にて $\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k}) = \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{kr})d\mathbf{r}$ としたが、これに式(3-10)を代入して、

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{kr})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\int_{\mathbf{k}'}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{kl}^{00}(\alpha, p_\alpha)\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k}')\exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r})\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\right]\exp(-i\mathbf{kr})d\mathbf{r} \\
&= \int_{\mathbf{k}'}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{00}(\alpha, p_\alpha)\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k}')\left[\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\exp\{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{r}d\mathbf{r}\right]\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \\
&= \int_{\mathbf{k}'}\sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{00}(\alpha, p_\alpha)\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{00}(\alpha, p_\alpha)\tilde{\eta}(\alpha, p_\alpha, \mathbf{k})
\end{aligned}$$

となり、式(3-8)と(3-13)が対応していることがわかる。

さて、弾性ポテンシャルを算出しよう。ポテンシャルを計算する際には、平衡方程式を用いる以前の弾性歪エネルギー式を基礎に出発する。弾性歪エネルギーは式(3-6)から、

$$\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r} - \sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\left\{\varepsilon_{ij}^{A} + \varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r})d\mathbf{r}
\end{aligned}$$

と表現できる。したがって、弾性ポテンシャルは、

$$\begin{aligned}
\chi_{str}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial E_{str}}{\partial\eta(\alpha, p_\alpha, \mathbf{r})} = \frac{\partial E_{str}}{\partial\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})}{\partial\eta(\alpha, p_\alpha, \mathbf{r})} \\
&= -\left\{C_{ijkl}\left[\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r}) - \left\{\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\right] - \sigma_{ij}^{A}\right\}\frac{\partial\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})}{\partial\eta(\alpha, p_\alpha, \mathbf{r})}
\end{aligned} \tag{3-14}$$

にて与えられる。実空間表示で、eigen 歪は、

$$\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{n_\alpha}\sum_{p_\alpha=1}^{n_p}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha)\eta(\alpha, p_\alpha, \mathbf{r})$$

であるので、

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})}{\partial \eta(\alpha, p_\alpha, \mathbf{r})} = \varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha) \tag{3-15}$$

である。したがって、弾性ポテンシャルは、

$$\chi_{str}(\mathbf{r}) = -\left\{C_{ijkl}\left[\delta\varepsilon_{kl}^{c}(\mathbf{r}) - \left\{\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r}) - \left\langle \varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\right] - \sigma_{ij}^{A}\right\}\varepsilon_{ij}^{00}(\alpha, p_\alpha) \tag{3-16}$$

にて与えられる。

４．外力の分類

外力の取扱い方には物体の外形に関する境界条件に基づき大きく次の２通りに分かれる。

（１）物体外部を拘束し外形を固定する場合

（２）物体外部を拘束せず外形変形を許容する場合

外力下で（１）の条件が成立するということは、全歪の平均値$\left\langle \varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle$が$\varepsilon_{ij}^{A}$に一致すれば良い。すなわち、

$$\left\langle \varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle = \varepsilon_{ij}^{A}, \qquad \overline{u}_i = 0 \tag{4-1}$$

が条件となる。また境界条件からすでに$\left\langle \varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle$が固定されているので、$\partial E_{str} / \partial \left\langle \varepsilon_{ij}^{c}(\mathbf{r})\right\rangle = 0$の条件は成立していない。したがって、弾性歪エネルギーは直接、式(3-1)より導かなくてはならない。つまり、

$$
\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}(\mathbf{r})d\mathbf{r} - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{s}} X_i^A \overline{u}_i d\mathbf{S} = \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r}) - \varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r}) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle - \delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right]\left[\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})\right\rangle - \delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})\right]d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right]\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r}) - \left\langle\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})\right\rangle\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\{\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}) - \varepsilon_{ij}^a\right\}\left\{\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r}) - \varepsilon_{kl}^a\right\}d\mathbf{r} \\
&\quad - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r})d\mathbf{r} - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^a d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^a\varepsilon_{kl}^a d\mathbf{r} \\
&\quad - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2}C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r})\right\rangle - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^a\left\langle\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\right\rangle + \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^a\varepsilon_{kl}^a \\
&\quad - \frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\delta\varepsilon_{kl}^c(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{2}C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^0(\mathbf{r})\right\rangle - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^a\left\langle\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\right\rangle + \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^a\varepsilon_{kl}^a - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^0(\mathbf{k})k_i G_{jk}(\mathbf{k})k_l\tilde{\sigma}_{kl}^{0^*}(\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}
\end{aligned}
\tag{4-2}
$$

となる。

一方、（２）の場合、物体は$\partial E_{str}/\partial\left\langle\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle = 0$の条件を満たすように変形できるので、全歪の平均値は、$\partial E_{str}/\partial\left\langle\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle = 0$の条件より eigen 歪と外力による歪の和となり、

$$\left\langle\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{r})\right\rangle = \varepsilon_{ij}^A + \left\langle\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r})\right\rangle \tag{4-3}$$

と表現される。したがって、弾性歪エネルギーは、式(3-9)

$$
\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r} \\
&\quad +\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\left\{\varepsilon_{ij}^{A}+\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\}d\mathbf{r}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_{i}G_{jk}(\mathbf{k})k_{l}\tilde{\sigma}_{kl}^{0^{*}}(\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3}} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left[\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]\left[\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})-\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right]d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_{i}G_{jk}(\mathbf{k})k_{l}\tilde{\sigma}_{kl}^{0^{*}}(\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3}} \\
&= \frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}+\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{2V}\int_{\mathbf{r}} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}d\mathbf{r}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_{i}G_{jk}(\mathbf{k})k_{l}\tilde{\sigma}_{kl}^{0^{*}}(\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3}} \\
&= \frac{1}{2}C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle-C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle+\frac{1}{2}C_{ijkl}\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle \\
&\quad -\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_{i}G_{jk}(\mathbf{k})k_{l}\tilde{\sigma}_{kl}^{0^{*}}(\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3}} \\
&= \frac{1}{2}C_{ijkl}\left\{\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle-\left\langle\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\left\langle\varepsilon_{kl}^{0}(\mathbf{r})\right\rangle\right\}-\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{A}\varepsilon_{kl}^{A}-\sigma_{ij}^{A}\frac{1}{V}\int_{\mathbf{r}}\varepsilon_{ij}^{0}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\tilde{\sigma}_{ij}^{0}(\mathbf{k})k_{i}G_{jk}(\mathbf{k})k_{l}\tilde{\sigma}_{kl}^{0^{*}}(\mathbf{k})\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3}}
\end{aligned}
\tag{4-4}
$$

となる。