７．Landauの弾性理論

7-1 E_{str}^{RX1}（relaxation分の歪エネルギーの一部）の導出

まず E_{str}^{RX1} を拘束歪 e_{ij}^{c} をorder parameterと見なして展開することを考える。歪エネルギー E_{str}^{RX1} は当然ながらスカラー量であり、一方 e_{ij}^{c} はベクトル量であるので、e_{ij}^{c} の展開形式にて歪エネルギーを表現するためには、歪不変量(座標系によらない)を用いてエネルギーを展開しなくてはならない。ここで歪不変量は次式にて定義される。

$$I_1 = e_{11}^c + e_{22}^c + e_{33}^c \tag{7-1-1}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} e_{22}^c & e_{23}^c \\ e_{32}^c & e_{33}^c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11}^c & e_{13}^c \\ e_{31}^c & e_{33}^c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11}^c & e_{12}^c \\ e_{21}^c & e_{22}^c \end{vmatrix} = e_{11}^c e_{22}^c + e_{22}^c e_{33}^c + e_{33}^c e_{11}^c - (e_{12}^c e_{21}^c + e_{23}^c e_{32}^c + e_{31}^c e_{13}^c) \tag{7-1-2}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} e_{11}^c & e_{12}^c & e_{13}^c \\ e_{21}^c & e_{22}^c & e_{23}^c \\ e_{31}^c & e_{32}^c & e_{33}^c \end{vmatrix} \tag{7-1-3}$$

以上の I_1, I_2, I_3 を用いて歪エネルギー E_{str}^{RX1} を展開するわけだが、$\left(e_{ij}^c\right)^3$ 以上の項を微小量として無視する。これより、考慮するべき歪不変量は I_1, I_2 のみである。さらに歪エネルギーを位置で微分した量 $\dfrac{\partial E_{str}^{RX1}}{\partial x}$ は力であり、かつ $e_{ij}^c = 0$ の場合には $\dfrac{\partial E_{str}^{RX1}}{\partial x}$ は０にならなくてはならないので、E_{str}^{RX1} の展開式の中に e_{ij}^c の一次項は存在しない。したがって、歪エネルギー E_{str}^{RX1} は一般的に次式にて与えられる。

$$E_{str}^{RX1} = k_1'(e_{11}^c + e_{22}^c + e_{33}^c)^2 + k_2'\{e_{11}^c e_{22}^c + e_{22}^c e_{33}^c + e_{33}^c e_{11}^c - (e_{12}^c e_{21}^c + e_{23}^c e_{32}^c + e_{31}^c e_{13}^c)\} \tag{7-1-4}$$

ここで k_1', k_2' は比例定数である。さらに上式を以下のように変形する。

$$E_{str}^{RX1} = k_1({e_{11}^c}^2 + {e_{22}^c}^2 + {e_{33}^c}^2) + k_2(e_{11}^c e_{22}^c + e_{22}^c e_{33}^c + e_{33}^c e_{11}^c) + k_3(e_{12}^c e_{12}^c + e_{23}^c e_{23}^c + e_{31}^c e_{31}^c) \tag{7-1-5}$$

比例定数の $k_1 \sim k_3$ は弾性定数から決定することができる。まず弾性定数 C_{ijkl} は次式にて定義される。

$$C_{ijkl} \equiv \frac{\partial E_{str}^{RX1}}{\partial e_{ij}^c \partial e_{kl}^c} \tag{7-1-6}$$

立方晶の場合を考えると、これより、

$$C_{1111} = \frac{\partial E_{str}^{RX1}}{\partial e_{11}^c \partial e_{11}^c} = 2k_1 = C_{11} \tag{7-1-7}$$

$$C_{1122} = \frac{\partial E_{str}^{RX1}}{\partial e_{11}^c \partial e_{22}^c} = k_2 = C_{12} \tag{7-1-8}$$

$$(C_{1212} + C_{2121} + C_{1221} + C_{2112}) = \frac{\partial E_{str}^{RX1}}{\partial e_{12}^c \partial e_{12}^c} = 2k_3 = 4C_{44} \tag{7-1-9}$$

したがって、E_{str}^{RX1}は最終的に次式にて与えられる。

$$E_{sre}^{RX1} = \frac{1}{2}C_{11}({e_{11}^c}^2 + {e_{22}^c}^2 + {e_{33}^c}^2) + C_{12}(e_{11}^c e_{22}^c + e_{22}^c e_{33}^c + e_{33}^c e_{11}^c) + 2C_{44}({e_{12}^c}^2 + {e_{23}^c}^2 + {e_{31}^c}^2) \qquad \text{(7-1-10)}$$

7-2 組織自由エネルギー G_{system} の導出

まず、濃度cと濃度勾配∇cと拘束歪e_{ij}^cをorder parameterとみなし、G_{system}をこれらの変数にて展開することを考える。G_{system}は次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} G_{system} &= g(c) + \kappa\left(\nabla c\right)^2 + \alpha(c - c_0)I_1 + E_{str}^{RX} \\ &= g(c) + \kappa\left(\nabla c\right)^2 + \alpha(c - c_0)(e_{11}^c + e_{22}^c + e_{33}^c) \qquad \text{(7-2-1)} \\ &\quad + \frac{1}{2}C_{11}({e_{11}^c}^2 + {e_{22}^c}^2 + {e_{33}^c}^2) + C_{12}(e_{11}^c e_{22}^c + e_{22}^c e_{33}^c + e_{33}^c e_{11}^c) + 2C_{44}({e_{12}^c}^2 + {e_{23}^c}^2 + {e_{31}^c}^2) \end{aligned}$$

ここで$g(c)$は化学的自由エネルギーに均一歪場の弾性歪エネルギーを含んだ量である。つまり、$g(c)$は整合析出線を与える自由エネルギーであると考えてもよい。また右辺第３項は濃度cと拘束歪e_{ij}^cの干渉項で、αはカップリング定数である。ここで歪不変量の一次項が現れる理由は、たとえ緩和の歪場が０であっても濃度変化による膨張・収縮に起因する変位場が存在するからである。なお濃度膨張場の基準は当然ながらc_0である。また右辺第３項も結果的にrelaxation分の歪エネルギーの一部で以下、E_{str}^{RX2}と記す。

さて、カップリング定数αを求めるために以下の歪場を想定する。まず析出物内部の歪場に着目し、Eshelbyサイクルにおいて固有歪分だけ歪ませた後に、その固有歪分だけ緩和した，いわゆる完全緩和の状態を考える。析出相内の濃度は均一と仮定すると析出相内部では、化学的自由エネルギー$f(c)$は定数となり、かつ濃度勾配エネルギーは０になる。したがって以下式(7-2-2)の歪場関連部分（この部分が最終的にE_{str}^{RX}に相当する）のみを取り出して以下のように表わす。

$$\begin{aligned} E_{str}^{RX} &= \alpha(c - c_0)(e_{11}^c + e_{22}^c + e_{33}^c) \\ &\quad + \frac{1}{2}C_{11}({e_{11}^c}^2 + {e_{22}^c}^2 + {e_{33}^c}^2) + C_{12}(e_{11}^c e_{22}^c + e_{22}^c e_{33}^c + e_{33}^c e_{11}^c) + 2C_{44}({e_{12}^c}^2 + {e_{23}^c}^2 + {e_{31}^c}^2) \qquad \text{(7-2-2)} \end{aligned}$$

さて、この完全緩和の場合、固有歪（eigen歪）と拘束歪は等しくなるので固有歪の絶対値をεとすると拘束歪は$e_{ij}^c = \varepsilon\delta_{ij}$と書くことが出来る。$\delta_{ij}$はディラックのデルタ関数である。これを式(7-2-2)に代入して整理する。

$$E_{str}^{RX} = 3\alpha(c - c_0)\varepsilon + \frac{3}{2}(C_{11} + 2C_{12})\varepsilon^2 \qquad \text{(7-2-3)}$$

ここで、歪場$e_{ij}^c = \varepsilon\delta_{ij}$に対して$E_{str}^{RX}$は瞬間的に極小値を取っていると仮定できるので（拡散の緩和時間に対して歪伝播の緩和時間は非常に短いと仮定できる。）、$\frac{\partial E_{str}^{RX}}{\partial \varepsilon} = 0$が成立する。したがって、

$$\frac{\partial E_{str}^{RX}}{\partial \varepsilon} = 3\alpha(c-c_0) + 3(C_{11}+2C_{12})\varepsilon = 0 \tag{7-2-4}$$

$$\therefore \quad \alpha = -\frac{(C_{11}+2C_{12})\varepsilon}{c-c_0} \tag{7-2-5}$$

さらに固有歪εは格子ミスマッチηを用いて$\varepsilon = \eta(c-c_0)$と表わすことが出来る。（なお固溶体の格子定数はVegard則に従うとする。）したがって、αは最終的に次式にて与えられる。

$$\alpha = -\frac{(C_{11}+2C_{12})\eta(c-c_0)}{c-c_0} = -\eta(C_{11}+2C_{12}) \tag{7-2-6}$$

さて、このαを式(7-2-3)に代入しE_{str}^{RX}を求める。

$$E_{str}^{RX} = -3(C_{11}+2C_{12})\eta^2(c-c_0)^2 + \frac{3}{2}(C_{11}+2C_{12})\eta^2(c-c_0)^2 = -\frac{3}{2}(C_{11}+2C_{12})\eta^2(c-c_0)^2 \tag{7-2-7}$$

ところで、いま考えている歪場は完全緩和であるので、析出相に貯えられている弾性歪エネルギーは結局０にならなくてならない。したがって式(7-2-7)のE_{str}^{RX}と$g(c)$内に含まれている均一歪場の弾性歪エネルギーE_{str}^{H}がキャンセルアウトしなくてはならない。これより$g(c)$内の歪項E_{str}^{H}は次式にて与えられる。

$$E_{str}^{H} = \frac{3}{2}(C_{11}+2C_{12})\eta^2(c-c_0)^2 \tag{7-2-8}$$

よって

$$g(c) = f(c) + E_{str}^{H} = f(c) + \frac{3}{2}(C_{11}+2C_{12})\eta^2(c-c_0)^2 \tag{7-2-9}$$

式(7-2-6)と(7-2-9)を式(7-2-1)に代入することによって最終的に組織自由エネルギーは次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} G_{system} = {} & f(c) + \kappa(\nabla c)^2 + \frac{3}{2}(C_{11}+2C_{12})\eta^2(c-c_0)^2 - \eta(C_{11}+2C_{12})(c-c_0)(e_{11}^c + e_{22}^c + e_{33}^c) \\ & + \frac{1}{2}C_{11}({e_{11}^c}^2 + {e_{22}^c}^2 + {e_{33}^c}^2) + C_{12}(e_{11}^c e_{22}^c + e_{22}^c e_{33}^c + e_{33}^c e_{11}^c) + 2C_{44}({e_{12}^c}^2 + {e_{23}^c}^2 + {e_{31}^c}^2) \end{aligned} \tag{7-2-10}$$

7-3 マイクロメカニクスとの対応について

まず式(7-2-10)の歪関連項を取り出し次式にて表わす。

$$\begin{aligned} E_{str} = {} & \frac{3}{2}(C_{11}+2C_{12})\eta^2(c-c_0)^2 - \eta(C_{11}+2C_{12})(c-c_0)(e_{11}^c + e_{22}^c + e_{33}^c) \\ & + \frac{1}{2}C_{11}({e_{11}^c}^2 + {e_{22}^c}^2 + {e_{33}^c}^2) + C_{12}(e_{11}^c e_{22}^c + e_{22}^c e_{33}^c + e_{33}^c e_{11}^c) + 2C_{44}({e_{12}^c}^2 + {e_{23}^c}^2 + {e_{31}^c}^2) \end{aligned} \tag{7-3-1}$$

一方、マイクロメカニクスから弾性歪エネルギーは次式にて定義されている。

$$E_{str} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} \tag{7-3-2}$$

（以上のエネルギー計算には正確には全て積分記号が必要なのであるが、簡単のため省略している。）

ここで式(7-3-2)をもう少し書き下す。

$$E_{str} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(e_{ij}^c - e_{ij}^T) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}^c - \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}^T = -\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}^T \tag{7-3-3}$$

なお平衡方程式および外力＝０の境界条件より、

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}^c = 0 \tag{7-3-4}$$

が成立する（厳密には積分表記が正しいが、省略している）。
まず、式(7-3-3)より

$$E_{str} = -\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}^T = -\frac{1}{2}C_{ijkl}(e_{kl}^c - e_{kl}^T)e_{ij}^T = \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^T e_{kl}^T - \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^T e_{kl}^c \tag{7-3-5}$$

また式(7-3-4)より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}^c = \frac{1}{2}C_{ijkl}(e_{kl}^c - e_{kl}^T)e_{ij}^c = 0 \\ &\therefore\ \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^c e_{kl}^c = \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^c e_{kl}^T \end{aligned} \tag{7-3-6}$$

ここで式(7-3-5)の右辺第１項を書き下すと

$$\frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^T e_{kl}^T = \frac{3}{2}(C_{11} + 2C_{12})\eta^2(c - c_0)^2 \tag{7-3-7}$$

となり、式(7-3-1)右辺第１項に等しい。また式(7-3-5)の右辺第２項を式(7-3-6)を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^T e_{kl}^c &= -\frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^c e_{kl}^T = -\frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^c e_{kl}^T + \left(\frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^c e_{kl}^c - \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^c e_{kl}^T\right) \\ &= -C_{ijkl}e_{ij}^c e_{kl}^T + \frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^c e_{kl}^c \end{aligned} \tag{7-3-8}$$

式(7-3-8)右辺第１項はを書き下すと

$$
\begin{aligned}
-C_{ijkl}e_{ij}^{c}e_{kl}^{T} &= -\eta(c-c_0)\{C_{ij11}e_{ij}^{c}+C_{ij22}e_{ij}^{c}+C_{ij33}e_{ij}^{c}\} \\
&= -\eta(c-c_0)\{C_{1111}e_{11}^{c}+C_{2211}e_{22}^{c}+C_{3311}e_{33}^{c} \\
&\qquad +C_{1122}e_{11}^{c}+C_{2222}e_{22}^{c}+C_{3322}e_{33}^{c} \\
&\qquad +C_{1133}e_{11}^{c}+C_{2233}e_{22}^{c}+C_{3333}e_{33}^{c}\} \\
&= -\eta(c-c_0)(C_{11}+2C_{12})(e_{11}^{c}+e_{22}^{c}+e_{33}^{c})
\end{aligned}
\tag{7-3-9}
$$

となり、式(7-3-1)右辺第２項に一致する。最後に式(7-3-8)の右辺第２項を書き下すと

$$
\frac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}^{c}e_{kl}^{c} = \frac{1}{2}C_{11}({e_{11}^{c}}^{2}+{e_{22}^{c}}^{2}+{e_{33}^{c}}^{2})+C_{12}(e_{11}^{c}e_{22}^{c}+e_{22}^{c}e_{33}^{c}+e_{33}^{c}e_{11}^{c})+2C_{44}({e_{12}^{c}}^{2}+{e_{23}^{c}}^{2}+{e_{31}^{c}}^{2}) \tag{7-3-10}
$$

となり、式(7-3-1)右辺第３項に等しい。以上より式(7-3-1)と式(7-3-2)は表記が異なるだけで全く同じ式である。ただ重要な点は、式(7-3-1)の e_{ij}^{c} と組成 c が、独立変数として扱うことが出来る（エネルギーを e_{ij}^{c} と c で展開できるとした時の仮定）点にある。つまり、式(7-3-1)を c で微分する場合、式(7-3-1)の表記を用いると $\partial e_{ij}^{c}/\partial c=0$ として良いことになる。

7-4 弾性定数の組成依存性の導入

弾性歪エネルギーの評価において、弾性定数の組成依存性を導入することは従来非常に難解とされてきたが、式(7-3-1)を用いいると比較的解析が容易になる。以下では弾性定数が組成に比例して変化する場合について考察する。まず弾性定数を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
C_{ijkl}(c) &= C_{ijkl}^{A}(1-c)+C_{ijkl}^{B}c \\
&= C_{ijkl}^{A}(1-c_0)+C_{ijkl}^{B}c_0+(C_{ijkl}^{B}-C_{ijkl}^{A})(c-c_0) \\
&= C_{ijkl}^{0}+\Delta C_{ijkl}^{AB}q
\end{aligned}
\tag{7-4-1}
$$

これより式(7-4-7-3-1)は、

$$
\begin{aligned}
E_{str} &= \frac{3}{2}(C_{11}^{0}+2C_{12}^{0})\eta^{2}(c-c_0)^{2}-\eta(C_{11}^{0}+2C_{12}^{0})(c-c_0)(e_{11}^{c}+e_{22}^{c}+e_{33}^{c}) \\
&+\frac{1}{2}C_{11}^{0}({e_{11}^{c}}^{2}+{e_{22}^{c}}^{2}+{e_{33}^{c}}^{2})+C_{12}^{0}(e_{11}^{c}e_{22}^{c}+e_{22}^{c}e_{33}^{c}+e_{33}^{c}e_{11}^{c})+2C_{44}^{0}({e_{12}^{c}}^{2}+{e_{23}^{c}}^{2}+{e_{31}^{c}}^{2}) \\
&+\frac{3}{2}(\Delta C_{11}^{AB}+2\Delta C_{12}^{AB})\eta^{2}(c-c_0)^{3}-\eta(\Delta C_{11}^{AB}+2\Delta C_{12}^{AB})(c-c_0)^{2}(e_{11}^{c}+e_{22}^{c}+e_{33}^{c}) \\
&+\frac{1}{2}\Delta C_{11}^{0}(c-c_0)({e_{11}^{c}}^{2}+{e_{22}^{c}}^{2}+{e_{33}^{c}}^{2})+\Delta C_{12}^{0}(c-c_0)(e_{11}^{c}e_{22}^{c}+e_{22}^{c}e_{33}^{c}+e_{33}^{c}e_{11}^{c})+2\Delta C_{44}^{0}(c-c_0)({e_{12}^{c}}^{2}+{e_{23}^{c}}^{2}+{e_{31}^{c}}^{2})
\end{aligned}
\tag{7-4-2}
$$

式(7-4-2)を c で微分することによってて、拡散ポテンシャルの弾性歪成分 μ_{el} も導出することができる。

$$
\begin{aligned}
\mu_{el} &= 3(C_{11}^{0}+2C_{12}^{0})\eta^{2}(c-c_0)-\eta(C_{11}^{0}+2C_{12}^{0})(e_{11}^{c}+e_{22}^{c}+e_{33}^{c}) \\
&+\frac{9}{2}(\Delta C_{11}^{AB}+2\Delta C_{12}^{AB})\eta^{2}(c-c_0)^{2}-2\eta(\Delta C_{11}^{AB}+2\Delta C_{12}^{AB})(c-c_0)(e_{11}^{c}+e_{22}^{c}+e_{33}^{c}) \\
&+\frac{1}{2}\Delta C_{11}^{AB}({e_{11}^{c}}^{2}+{e_{22}^{c}}^{2}+{e_{33}^{c}}^{2})+\Delta C_{12}^{AB}(e_{11}^{c}e_{22}^{c}+e_{22}^{c}e_{33}^{c}+e_{33}^{c}e_{11}^{c})+2\Delta C_{44}^{AB}({e_{12}^{c}}^{2}+{e_{23}^{c}}^{2}+{e_{31}^{c}}^{2})
\end{aligned}
\tag{7-4-3}
$$

ここで重要な事は、組成 c と歪 e が独立変数として、エネルギーが展開されているので、単に組成

cでエネルギーを微分するだけで、ポテンシャル場を求めることが出来るのである。式(7-4-2)および式(7-4-3)を計算するには、まず未知量であるe_{ij}^{c}を式(4-18)から計算し、その結果を式(7-4-2)(7-4-3)に代入することにとって求めることが出来る。

7-5 等方弾性体表記の導出。

まず、弾性定数の関係式を

$$C_{11} = \lambda + 2\mu$$
$$C_{12} = \lambda$$
$$C_{44} = \mu$$

$$K = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12})$$
$$K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$$
$$\mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$$
$$C_{11} + 2C_{12} = 3\lambda + 2\mu$$

と置く。式(7-5-1)の弾性歪エネルギーを等方体表示する。

$$E_{str} = \frac{1}{2}C_{11}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + C_{12}(e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11}) + 2C_{44}(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \tag{7-5-1}$$

先に最終結果を示すと以下のようになる。

$$E_{str} = \frac{1}{2}K(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + \mu\sum_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}(e_{11} + e_{22} + e_{33})\right)^2 \tag{7-5-2}$$

以下、天下り式に式(7-5-1)と式(7-5-2)が一致することを示す。まず式(7-5-2)第１項は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}K(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 &= \frac{1}{6}(C_{11} + 2C_{12})\{e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2(e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11})\} \\ &= \frac{1}{6}(C_{11} + 2C_{12})(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12})(e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11})\end{aligned} \tag{7-5-3}$$

次に式(7-5-2)第２項$\mu\sum_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}(e_{11} + e_{22} + e_{33})\right)^2$は

$i = j$の場合

$$
\begin{aligned}
&\mu\sum_{ij}\left\{e_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\}^2\\
&=\mu\sum_{ii}\left\{e_{ii}-\frac{1}{3}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\}^2\\
&=\mu\left\{\left(\frac{2}{3}e_{11}-\frac{1}{3}e_{22}-\frac{1}{3}e_{33}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}e_{11}+\frac{2}{3}e_{22}-\frac{1}{3}e_{33}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}e_{11}-\frac{1}{3}e_{22}+\frac{2}{3}e_{33}\right)^2\right\}\\
&=\frac{2}{3}\mu\left[(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)-(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11})\right]\\
&=\frac{1}{3}(C_{11}-C_{12})\left[(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)-(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11})\right]
\end{aligned}
$$

$i\neq j$ の場合

$$
\mu\sum_{ij}\left\{e_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\}^2=\mu\sum_{ij(i\neq j)}e_{ij}^2=2\mu(e_{12}^2+e_{23}^2+e_{31}^2)=2C_{44}(e_{12}^2+e_{23}^2+e_{31}^2)
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
&\mu\sum_{ij}\left\{e_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\}^2\\
&=\frac{1}{3}(C_{11}-C_{12})\left[(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)-(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11})\right]\quad+2C_{44}(e_{12}^2+e_{23}^2+e_{31}^2)
\end{aligned}
\tag{7-5-4}
$$

式(7-5-3)と(7-5-4)を式(7-5-2)に代入する。

$$
\begin{aligned}
E_{str}&=\frac{1}{2}K(e_{11}+e_{22}+e_{33})^2+\mu\sum_{ij}\left\{e_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\}^2\\
&=\frac{1}{6}(C_{11}+2C_{12})(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)+\frac{1}{3}(C_{11}+2C_{12})(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11})\\
&\quad+\frac{1}{3}(C_{11}-C_{12})\left[(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)-(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11})\right]+2C_{44}(e_{12}^2+e_{23}^2+e_{31}^2)\\
&=\frac{1}{2}C_{11}(e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2)+C_{12}(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{33}e_{11})+2C_{44}(e_{12}^2+e_{23}^2+e_{31}^2)
\end{aligned}
\tag{7-5-5}
$$

以上のように式(7-5-1)と式(7-5-2)は一致する。