楕円体の断面積と楕円体の形状関数について

by T.Koyama

１．直交座標系における固有値問題と標準座標系

　n 次元ユークリッド空間における直交軸について、ベクトル $\mathbf{x}$ をベクトル $\mathbf{y}$ に移す１次変換で、ベクトルの大きさを不変に保つ変換を直交変換という。すなわち、

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} x_j, \quad \mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \quad |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$$

であり、このときの行列 $\mathbf{L}$ を直交行列という。基本的に直交行列は n 次元ユークリッド空間におけるにおける回転を意味し、直交行列には

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}, \quad |\mathbf{L}| = \pm 1$$

の性質がある。

２．主軸問題

　ある直交変換 $\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{y}$ によって、２次形式

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

を標準形

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

に変換する問題を主軸問題と言う。

　$\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{y}$ より、この転置行列は、

$$\mathbf{x}^T = (\mathbf{L}\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T \mathbf{L}^T$$

である。したがって、

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T \mathbf{L}^T)\mathbf{A}(\mathbf{L}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{L}^T \mathbf{A}\mathbf{L})\mathbf{y} = \mathbf{y}^T (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{L})\mathbf{y}$$

となり、これが $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ に一致するためには、行列 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L}$ が対角行列 $\mathbf{\Lambda}$（対角要素 λ_i）とならなくてはならない。

　この意味を明確にするために、

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x}$$

の $\mathbf{x}=\mathbf{L}\mathbf{y}$ による１次変換を計算して見よう。第一項は一次変換の定義から、および第二項は直交変換の定義に基づき

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\mathbf{y}^T(\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{y}$$

となる。したがって、係数間には、

$$\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{L}=(\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{E})$$

の関係が成立する。両辺の行列式を取ると、

$$\left|\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{L}\right|=\left|\mathbf{L}^{-1}\right|\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|\left|\mathbf{L}\right|=\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=\left|\mathbf{\Lambda}-\lambda\mathbf{E}\right|$$

であるので、これより、

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

が成立する。したがって、λ_i は λ に関する n 次方程式

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=0$$

の解でなくてはならない。この n 次方程式が固有方程式、解の λ_i が固有値である。
固有値の１つを λ_1 とする。このとき、

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}$ を行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ_1 に対する固有ベクトルを言う。

３．楕円の回転について

(x,y)直交座標系における２次元ユークリッド平面において、

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

は楕円を表す。この式は２次形式であるので、行列を用いて、

$$ax^2+2hxy+by^2=x(ax+hy)+y(hx+by)=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+hy \\ hx+by \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

と表現できる。座標軸を回転させ、新たな座標軸を (x',y') としよう。座標系 (x',y') には、上記の楕円が、

$$\alpha x'^2+\beta y'^2=x'\alpha x+y'\beta y'=\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha x'\\ \beta y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=1$$

と表現できたとする。これは先に説明した主軸問題であるので、α,β は、

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & h\\ h & b-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$(a-\lambda)(b-\lambda)-h^2=\lambda^2-(a+b)\lambda+ab-h^2=0$$

の解である。$h>0$ の時、２つの解の内大きな方が α である。また $h<0$ では、２つの解の内小さなが α である。（なお、いま楕円を考えているので、$\alpha,\beta>0$ である。）

また 2 次方程式解の積の公式 $(ax^2+bx+c=0,\ x_1x_2=c/a,\ x_1+x_2=-b/a,)$ から、２つの解の積は、

$$\alpha\beta=ab-h^2$$

であるので、楕円の方程式を、

$$\alpha x'^2+\beta y'^2=1$$
$$\frac{x'^2}{(1/\sqrt{\alpha})^2}+\frac{y'^2}{(1/\sqrt{\beta})^2}=1$$

と変形することにより、楕円の面積 S は、

$$S=\pi\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\pi}{\sqrt{ab-h^2}}$$

と与えられる。

４．楕円体の断面積の導出１

楕円体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

と平面

$$lx+my+nz=0$$

の交わりの面積（楕円体の断面積）を算出する。ただし $l^2+m^2+n^2=1$ とする。

まず、$n\neq 0$ と仮定して、平面の方程式を

$$z = -\frac{1}{n}(lx + my)$$

と変形する。これを楕円体の方程式に代入し、

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}\left\{-\frac{1}{n}(lx + my)\right\}^2 \\
&= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{n^2c^2}(l^2x^2 + m^2y^2 + 2lmxy) \\
&= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{l^2}{n^2c^2}\right)x^2 + \frac{2lm}{n^2c^2}xy + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{m^2}{n^2c^2}\right)y^2 = 1
\end{aligned}$$

を得る。これは、楕円体の断面の外周を xy 平面に投影した方程式で、楕円形状であることがわかる。この楕円の面積を S' とすると、先の議論から、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a^2} + \frac{l^2}{n^2c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{m^2}{n^2c^2}\right) - \left(\frac{lm}{n^2c^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{n^2c^2 + a^2l^2}{a^2c^2n^2}\right)\left(\frac{n^2c^2 + b^2m^2}{b^2c^2n^2}\right) - \frac{l^2m^2}{n^4c^4} \\
&= \frac{(c^2n^2 + a^2l^2)(c^2n^2 + b^2m^2) - a^2b^2l^2m^2}{a^2b^2c^4n^4} \\
&= \frac{c^4n^4 + (a^2l^2 + b^2m^2)c^2n^2 + a^2b^2l^2m^2 - a^2b^2l^2m^2}{a^2b^2c^4n^4} \\
&= \frac{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}{a^2b^2c^2n^2}
\end{aligned}$$

$$S' = \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}{a^2b^2c^2n^2}}} = \frac{\pi abc|n|}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}$$

にて求められる。ところで、平面 $lx + my + nz = 0$ と xy 平面のなす角の余弦が $|n|$ であるので、求める断面積は、面積は、

$$S|n| = S' = \frac{\pi abc|n|}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}$$

$$\therefore\ S = \frac{\pi abc}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}$$

と計算される。

５．楕円体の断面積の導出２

以上の問題は、平面が原点を通る平面であったが、次にこの制約を外す。すなわち、

楕円体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

と平面

$$lx+my+nz=w$$

の交わりの面積（楕円体の断面積）を算出する。ただし$l^2+m^2+n^2=1$とし、またwは原点から平面までの垂直距離である。

先と同様に、$n\neq 0$と仮定して、平面の方程式を

$$z=-\frac{1}{n}(lx+my-w)$$

と変形する。これを楕円体の方程式に代入し、

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\left\{-\frac{1}{n}(lx+my-w)\right\}^2\\&=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{1}{c^2n^2}\{l^2x^2+m^2y^2+2lmxy-2w(lx+my)+w^2\}\\&=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x^2+\frac{2lm}{c^2n^2}xy+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y^2-\frac{2wl}{c^2n^2}x-\frac{2wm}{c^2n^2}y+\frac{w^2}{c^2n^2}=1\end{aligned}$$

を得る。これは、楕円体の断面の外周をxy平面に投影した方程式で、やはり楕円形状であることがわかる。しかし、楕円の原点はxy平面の原点には一致しない。まずこの楕円の中心座標を求める。中心座標を(x_1,y_1)とすると、$x=x-x_1$および$y=y-y_1$を上式に代入することにより、xとyの係数は0とならなくてはならない。したがって、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)(x-x_1)^2+\frac{2lm}{c^2n^2}(x-x_1)(y-y_1)+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)(y-y_1)^2\\&-\frac{2wl}{c^2n^2}(x-x_1)-\frac{2wm}{c^2n^2}(y-y_1)+\frac{w^2}{c^2n^2}=1\end{aligned}$$

より、

$$-2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x_1-\frac{2lm}{c^2n^2}y_1-\frac{2wl}{c^2n^2}=0$$

$$-2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y_1-\frac{2lm}{c^2n^2}x_1-\frac{2wm}{c^2n^2}=0$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2} & \frac{lm}{c^2n^2}\\ \frac{lm}{c^2n^2} & \frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{wl}{c^2n^2}\\ -\frac{wm}{c^2n^2}\end{pmatrix}$$

であり、(x_1, y_1)は、

$$x_1=\frac{-\frac{wl}{b^2c^2n^2}}{\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2b^2c^2n^2}}=-a^2l\frac{w}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$$

$$y_1=\frac{-\frac{wm}{a^2c^2n^2}}{\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2b^2c^2n^2}}=-b^2m\frac{w}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$$

にて与えられる。

ここで、

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2} & \frac{lm}{c^2n^2}\\ \frac{lm}{c^2n^2} & \frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{n^2c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{n^2c^2}\right)-\left(\frac{lm}{n^2c^2}\right)^2=\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2b^2c^2n^2}$$

$$\begin{vmatrix}-\frac{wl}{c^2n^2} & \frac{lm}{c^2n^2}\\ -\frac{wm}{c^2n^2} & \frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\end{vmatrix}=-\left(\frac{wl}{c^2n^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)+\frac{lm}{c^2n^2}\frac{wm}{c^2n^2}=-\frac{wl}{b^2c^2n^2}$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2} & -\frac{wl}{c^2n^2}\\ \frac{lm}{c^2n^2} & -\frac{wm}{c^2n^2}\end{vmatrix}=-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)\left(\frac{wm}{c^2n^2}\right)+\frac{wl}{c^2n^2}\frac{lm}{c^2n^2}=-\frac{wm}{a^2c^2n^2}$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{n^2c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{n^2c^2}\right)-\left(\frac{lm}{n^2c^2}\right)^2=\left(\frac{n^2c^2+a^2l^2}{a^2c^2n^2}\right)\left(\frac{n^2c^2+b^2m^2}{b^2c^2n^2}\right)-\frac{l^2m^2}{n^4c^4}$$
$$=\frac{(c^2n^2+a^2l^2)(c^2n^2+b^2m^2)-a^2b^2l^2m^2}{a^2b^2c^4n^4}=\frac{c^4n^4+(a^2l^2+b^2m^2)c^2n^2+a^2b^2l^2m^2-a^2b^2l^2m^2}{a^2b^2c^4n^4}$$
$$=\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2b^2c^2n^2}$$

$$-\left(\frac{wl}{c^2n^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)+\frac{lm}{c^2n^2}\frac{wm}{c^2n^2}=-\frac{wl(n^2c^2+b^2m^2)}{b^2c^4n^4}+\frac{lm^2w}{c^4n^4}=-\frac{wl}{b^2c^2n^2}$$

$$-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)\left(\frac{wm}{c^2n^2}\right)+\frac{wl}{c^2n^2}\frac{lm}{c^2n^2}=-wm\frac{n^2c^2+a^2l^2}{a^2c^4n^4}+\frac{ml^2w}{c^4n^4}=-\frac{wm}{a^2c^2n^2}$$

である。

また定数項は、

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x_1^2+\frac{2lm}{c^2n^2}x_1y_1+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y_1^2+\frac{2wl}{c^2n^2}x_1+\frac{2wm}{c^2n^2}y_1+\frac{w^2}{c^2n^2}$$
$$=-\frac{lm}{c^2n^2}x_1y_1-\frac{wl}{c^2n^2}x_1+\frac{2lm}{c^2n^2}x_1y_1-\frac{lm}{c^2n^2}x_1y_1-\frac{wm}{c^2n^2}y_1+\frac{2wl}{c^2n^2}x_1+\frac{2wm}{c^2n^2}y_1+\frac{w^2}{c^2n^2}$$
$$=\frac{wl}{c^2n^2}x_1+\frac{wm}{c^2n^2}y_1+\frac{w^2}{c^2n^2}$$
$$=\frac{1}{c^2n^2}(wlx_1+wmy_1+w^2)$$
$$=\frac{1}{c^2n^2}\left(-wla^2l\frac{w}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}-wmb^2m\frac{w}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}+w^2\right)$$
$$=\frac{w^2}{c^2n^2}\left(\frac{-a^2l^2-b^2m^2+a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}\right)$$
$$=\frac{w^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$$

と変形できる。ここで、

$$-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x_1-\frac{lm}{c^2n^2}y_1-\frac{wl}{c^2n^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x_1=-\frac{lm}{c^2n^2}y_1-\frac{wl}{c^2n^2}$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x_1^2=-\frac{lm}{c^2n^2}x_1y_1-\frac{wl}{c^2n^2}x_1$$

$$-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y_1-\frac{lm}{c^2n^2}x_1-\frac{wm}{c^2n^2}=0$$

$$\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y_1=-\frac{lm}{c^2n^2}x_1-\frac{wm}{c^2n^2}$$

$$\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y_1^2=-\frac{lm}{c^2n^2}x_1y_1-\frac{wm}{c^2n^2}y_1$$

を用いた。

以上から、原点を中心に持つ楕円の式は、

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)(x-x_1)^2+\frac{2lm}{c^2n^2}(x-x_1)(y-y_1)+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)(y-y_1)^2$$

$$-\frac{2wl}{c^2n^2}(x-x_1)-\frac{2wm}{c^2n^2}(y-y_1)+\frac{w^2}{c^2n^2}=1$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x^2+\frac{2lm}{c^2n^2}xy+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y^2+\frac{w^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}=1$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x^2+\frac{2lm}{c^2n^2}xy+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y^2=\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-w^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$$

$$t\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{c^2n^2}\right)x^2+t\frac{2lm}{c^2n^2}xy+t\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{c^2n^2}\right)y^2=1$$

にて与えられる。ここで、

$$t=\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-w^2}$$

である。したがって、この楕円の面積をS'とすると、

$$t\left(\frac{1}{a^2}+\frac{l^2}{n^2c^2}\right)t\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{n^2c^2}\right)-t^2\left(\frac{lm}{n^2c^2}\right)^2=\frac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2b^2c^2n^2}t^2$$

$$S'=\frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}{a^2b^2c^2n^2}t^2}}=\frac{\pi abc|n|}{t\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$$

にて求められる。ところで、平面 $lx+my+nz=0$ と xy 平面のなす角の余弦が $|n|$ であるので、求める断面積は、面積は、

$$S|n| = S' = \frac{\pi abc|n|}{t\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$$
$$\therefore\ S = \frac{\pi abc}{t\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}} = \frac{\pi abc(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-w^2)}{(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)^{3/2}}$$

と計算される。

ところで方向余弦は、角度 (θ,φ) を用いて、

$$l = \sin\theta\cos\varphi$$
$$m = \sin\theta\sin\varphi$$
$$n = \cos\theta$$

にて表現でき、さらに楕円体において、

$$a = a$$
$$b = aq$$
$$c = ap$$

と置くとともに、

$$K(\theta,\varphi) = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + q^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + p^2\cos^2\theta}$$

を定義すると、

$$\begin{aligned}
&a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2 \\
&= a^2l^2+a^2q^2m^2+a^2p^2n^2 \\
&= a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + a^2q^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + a^2p^2\cos^2\theta \\
&= a^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi + q^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + p^2\cos^2\theta) \\
&= a^2K^2(\theta,\varphi)
\end{aligned}$$

であるので、

$$S = \frac{\pi abc(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-w^2)}{(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)^{3/2}} = \frac{\pi a^3pq\{a^2K^2(\theta,\varphi)-w^2\}}{\{a^2K^2(\theta,\varphi)\}^{3/2}} = \frac{\pi pq\{a^2K^2(\theta,\varphi)-w^2\}}{K^3(\theta,\varphi)}$$

となる。

６．楕円体状粒子の形状関数の導出

楕円体の３軸を x,y,z 軸とし、楕円体表面と軸との交点を a,aq,ap と置く。実空間におけ

る楕円体の関数式は、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2q^2}+\frac{z^2}{a^2p^2}=1$$

および、極座標表示では、

$$x = a\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = aq\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = ap\cos\theta$$

となる。θを$\mathbf{h}$方向とz軸のなす角度と置き、$\mathbf{h}$のxy面内の方位角をφとする。$\mathbf{h}$方向上で原点から距離wの点を通り、$\mathbf{h}$方向に垂直な面が楕円体と交わる曲線は楕円となる。ここで次の関数$K(\theta,\varphi)$を定義する。

$$K(\theta,\varphi)=\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi+q^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+p^2\cos^2\theta}$$

これより、切り取られた楕円の面積Aは、

$$A\equiv\frac{\pi qp(w_0^2-w^2)}{K^3(\theta,\varphi)}$$
$$w_0\equiv aK(\theta,\varphi)$$

にて与えられる。w_0はwの最大値である（$w>w_0$の時、平面は楕円体と交わらない）。この解析のキーポイントは、Aがwの関数になる点にある。したがって、このAがwの関数になる条件が満足される場合には、回転楕円体以外の他の形状に関しても、以下の解析は同様となる。（θ,φは$\mathbf{h}$によって決まる点にも注意）

また、以上の式から、

$$K(\theta,\varphi)=\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi+q^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+p^2\cos^2\theta}$$
$$K^2(\theta,\varphi)=\sin^2\theta\cos^2\varphi+q^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+p^2\cos^2\theta$$
$$a^2K^2(\theta,\varphi)=a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+a^2q^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+a^2p^2\cos^2\theta$$
$$a^2K^2(\theta,\varphi)=x^2+y^2+z^2$$
$$w_0^2=a^2K^2(\theta,\varphi)=x^2+y^2+z^2$$

の関係にあることがわかる。

以上から、形状関数の計算は、$-v_0$からv_0まで、切り取られた楕円の面積Aをvに沿って積分すればよい。つまり、

$$\begin{aligned}\theta(\mathbf{h}) &= \int_{\mathbf{r}} c(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{hr})d\mathbf{r}\\ &= \int_0^{\mathbf{r}'}\int_{-w_0}^{w_0}\exp\{i\mathbf{h}(\mathbf{w}+\mathbf{r}')\}dwd\mathbf{r}'\\ &= \int_0^{\mathbf{r}'}\int_{-w_0}^{w_0}\exp(ihw)dwd\mathbf{r}'\\ &= \int_{-w_0}^{w_0}\exp(ihw)\left\{\int_0^{\mathbf{r}'}d\mathbf{r}'\right\}dw\\ &= \int_{-w_0}^{w_0}\exp(ihw)Adw\end{aligned}$$

となる。ここで、$\mathbf{w}$ は $\mathbf{h}$ 方向で長さが v のベクトルで、$\mathbf{r}'$ は切り取られた楕円内の位置ベクトルである。また $\mathbf{h}\cdot\mathbf{w}=hw,\ \ \mathbf{h}\cdot\mathbf{r}'=0$ を用いた。これより、

$$\theta(\mathbf{h}) = \int_{-w_0}^{w_0}\exp(ihw)Adw = \frac{\pi qp}{K^3(\theta)}\int_{-w_0}^{w_0}(w_0^2-w^2)\cos(hw)dw$$

と計算される。さらに、

$$w_0^2\int_0^{w_0}\cos(hw)dw = \frac{w_0^2}{h}\sin(hw_0)$$

および

$$\int_0^{w_0}w^2\cos(hw)dw = \frac{w_0^2}{h}\sin(hw_0)+\frac{2w_0}{h^2}\cos(hw_0)-\frac{2}{h^3}\sin(hw_0)$$

より、

$$\begin{aligned}\int_{-w_0}^{w_0}(w_0^2-w^2)\cos(hw)dw &= 2\int_0^{w_0}(w_0^2-w^2)\cos(hw)dw\\ &= 2\left\{\frac{w_0^2}{h}\sin(hw_0)-\left[\frac{w_0^2}{h}\sin(hw_0)+\frac{2w_0}{h^2}\cos(hw_0)-\frac{2}{h^3}\sin(hw_0)\right]\right\}\\ &= 4\left\{\frac{1}{h^3}\sin(hw_0)-\frac{w_0}{h^2}\cos(hw_0)\right\}\\ &= \frac{4\left[\sin(w_0h)-w_0h\cos(w_0h)\right]}{h^3}\end{aligned}$$

であるので、$\theta(\mathbf{h})$ は次式にて与えられる。

$$\theta(\mathbf{h}) = \frac{4\pi qp}{K^3(\theta,\varphi)}\frac{\left[\sin(w_0h)-w_0h\cos(w_0h)\right]}{h^3} = 3V\frac{qp}{K^3(\theta,\varphi)}\frac{\left[\sin(w_0h)-w_0h\cos(w_0h)\right]}{(w_0h)^3}$$

ここで、$V=\dfrac{4}{3}\pi w_0^3$ である。なお回転楕円体の場合には

$$q = 1$$
$$K(\theta, p) = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + p^2\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta + p^2\cos^2\theta}$$
$$w_0 \equiv aK(\theta, p)$$
$$\theta(\mathbf{h}) = 3V\frac{p}{K^3(\theta, p)}\frac{\left[\sin(w_0 h) - w_0 h\cos(w_0 h)\right]}{(w_0 h)^3}$$

球の場合には

$$p = q = 1$$
$$K = 1$$
$$w_0 = a$$
$$\theta(\mathbf{h}) = 3V\frac{\left[\sin(a_0 h) - a_0 h\cos(a_0 h)\right]}{(a_0 h)^3}$$

となる。