特殊関数

by T.Koyama

１．テイラー展開

ここではテイラー展開を証明する。まず関数 $f(x)$が次のように展開できるとしよう。

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^m \tag{1}$$

また、x を a だけずらすと、

$$f(x+a)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m (x+a)^m \tag{2}$$

である。ここで、$(x+a)^m$ を２項展開して、

$$(x+a)^m=\sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{(m-l)!\,l!}x^{m-l}a^l \tag{3}$$

と書く。式(3)を式(2)に代入して、

$$f(x+a)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}C_m\frac{m!}{(m-l)!\,l!}x^{m-l}a^l \tag{4}$$

である。ここで、m 階微分を $f^{(m)}(x)$ としよう。これより、

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x)&=\sum_{m=1}^{\infty}C_m m x^{m-1}=\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+1}(m+1)x^m\\
f^{(2)}(x)&=\sum_{m=1}^{\infty}C_{m+1}(m+1)m x^{m-1}=\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+2}(m+2)(m+1)x^m\\
&\vdots\\
f^{(l)}(x)&=\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}(m+l)(m+l-1)\cdots(m+1)x^m=\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}\frac{(m+l)!}{m!}x^m
\end{aligned} \tag{5}$$

と計算される。x に a を代入すると、

$$f^{(l)}(a)=\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}\frac{(m+l)!}{m!}a^m \tag{6}$$

であり、また、

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}f^{(l)}(a)x^l=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}\frac{(m+l)!}{l!\,m!}a^m x^l \tag{7}$$

となる。特に $l=n-m$ と変数変換を行うと、$l\geq 0$,すなわち $m\leq n$であるので、m の最大値は n となり、式(7)は、

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l\,!}f^{(l)}(a)x^{l}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+l}\frac{(m+l)!}{l\,!\,m!}a^{m}x^{l}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{n}\frac{n!}{(n-m)!\,m!}a^{m}x^{n-m} \tag{8}$$

と書けることがわかる。したがって、式(4)と比較することにより、

$$f(x+a)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}C_{m}\frac{m!}{(m-l)!\,l\,!}x^{m-l}a^{l}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{n}\frac{n!}{(n-m)!\,m!}a^{m}x^{n-m}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l\,!}f^{(l)}(a)x^{l} \tag{9}$$

のように導かれる。さらに、 $x+a\rightarrow x$ とすると、テイラー展開の公式が、

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l\,!}f^{(l)}(a)(x-a)^{l} \tag{10}$$

得られる。特に、上記の式変形にて用いた、２項展開とテイラー展開の関係について理解しておく必要がある。

２．微分方程式の級数解

ここでは、微分方程式の級数解法について説明する。非常に簡単な例として、

$$\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{11}$$

を考えてみよう。まず、y を次のように x の級数展開にて表現できるとする。

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}x^{n} \tag{12}$$

式(12)を式(11)に代入する。

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}C_{n}nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}x^{n}=0\\&\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_{m+1}(m+1)x^{m}+C_{m}x^{m}\right]=0\\&\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_{m+1}(m+1)+C_{m}\right]x^{m}=0\end{aligned} \tag{13}$$

改めて、m を n と置いて、C_n に関する条件式を求めると、C_n の漸化式が得られる。y を x にてテイラー展開しているので、微分方程式内の微分操作は、x の指数部のシフトを意味し、展開係数である C_n について必ず漸化式が導かれる。さて、漸化式をといてみよう。

$$\begin{aligned}&C_{n+1}(n+1)+C_{n}=0\\&C_{n}n+C_{n-1}=0\\&C_{n}=\frac{(-1)}{n}C_{n-1}=\frac{(-1)}{n}\left(\frac{(-1)}{n-1}\right)C_{n-2}=\frac{(-1)}{n}\left(\frac{(-1)}{n-1}\right)\left(\frac{(-1)}{n-2}\right)C_{n-3}=\frac{(-1)^{n}}{n!}C_{0}\end{aligned} \tag{14}$$

式(14)を式(12)に代入することによって、求める y の関数が得られる。

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_0 x^n=C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n=C_0\exp(-x) \tag{15}$$

通常、微分方程式の解が、初等的な三角関数や指数関数にて表現される場合はまれである。大部分の微分方程式の解はそのような初等的な関数形では表現できない。この複雑な関数形で物理現象にしばしば現れるものが、特殊関数である。特殊関数は、そのままの形式では表現できないので、通常、展開形式にて表現される。したがって、微分方程式の級数解法が特殊関数の分野で多用されるのは当然なのである。

さて、以下において具体的に各種の特殊関数について見ていこう。

３．ベッセル関数

ベッセル関数は、種々の物理現象において現れる。特に、ある物理量が波で表現でき、それが２次元以上の時空において動径方向に減衰していく場合に多く適用できる。ここではまず回折現象の１であるフラウンホーファー回折を取り上げる。

回折強度を I とすると、通常

$$I\propto\{u(X,Y)\}^2\propto\frac{1}{r^2} \tag{1}$$

$$u(X,Y)\propto\exp(ikr)dS \tag{2}$$

である。回折領域 S 上の座標系を(x,y)およびスクリーン格子上の座標系を(X,Y)とした。r は回折点(x,y)とスクリーン格子上の点(X,Y)の距離である。これより、

$$u(X,Y)=\int_S A\frac{\exp(ikr)}{r}dS \tag{3}$$

にて与えられることがわかる。ここで、

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+L^2}\quad \text{および}\quad \xi=\frac{X}{R}\ ,\ \eta=\frac{Y}{R} \tag{4}$$

と置こう。R は回折領域の原点(0,0)とスクリーン上の点(X,Y)の距離で、L は回折領域とスクリーンの距離である。ここで、

$$\begin{aligned}
r&=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+L^2}\\
&=\sqrt{X^2-2xX+x^2+Y^2-2yY+y^2+L^2}\\
&=\sqrt{R^2-2xX-2yY+x^2+y^2}\\
&\cong R\sqrt{1-2\left(\frac{xX}{R^2}+\frac{yY}{R^2}\right)}\\
&\cong R\left\{1-\left(\frac{xX}{R^2}+\frac{yY}{R^2}\right)\right\}=R\left\{1-\left(\xi\frac{x}{R}+\eta\frac{y}{R}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

と近似する。式(5)を式(3)に代入すると、

$$\begin{aligned} u(X,Y) &= \int_S A\frac{\exp(ikr)}{r}dS \\ &\cong \int_S A\frac{\exp\left[ikR\left\{1-\left(\xi\frac{x}{R}+\eta\frac{y}{R}\right)\right\}\right]}{R\left\{1-\left(\xi\frac{x}{R}+\eta\frac{y}{R}\right)\right\}}dS \\ &= A\frac{\exp(ikR)}{R}\int_S \frac{\exp\{-ik(\xi x+\eta y)\}}{\left\{1-\left(\xi\frac{x}{R}+\eta\frac{y}{R}\right)\right\}}dS \\ &\cong A\frac{\exp(ikR)}{R}\int_S \exp\{-ik(\xi x+\eta y)\}dxdy \end{aligned} \tag{6}$$

と変形できる。ここで、ベッセル関数とは無関係であるが、典型的なフラウンホーファー回折の例として、回折領域 S がスリット（x 方向のスリット幅を a、および y 方向の幅は無限大）である場合を考えてみよう。この時、式(6)の積分は、

$$\int_S \exp\{-ik(\xi x+\eta y)\}dxdy = \int_{-a/2}^{a/2}\exp(-ik\xi x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik\eta y)dy = \frac{2\pi}{k}\delta(\eta)\frac{\sin(k\xi a/2)}{k\xi/2} \tag{7}$$

となる。ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik\eta y)dy = \frac{2\pi}{k}\delta(\eta) \quad \text{および} \quad \int_{-a/2}^{a/2}\exp(-ik\xi x)dx = \frac{\sin(k\xi a/2)}{k\xi/2} \tag{8}$$

を用いた。なお回折領域を結晶格子に置き換え、ここで説明した方法を発展させていくと、ラウエ関数を導くことができる。

さて、今度は回折領域 S がスリットではなく円孔の場合について解いてみよう。この場合はベッセル関数が関係する。まず、円孔であるので、

$$x = r_h\cos\theta\ ,\ y = r_h\sin\theta \quad \text{および} \quad X = r_s\cos\theta\ ,\ Y = r_s\sin\theta \tag{9}$$

と変数変換を行う。r_h は円孔内の半径方向で、r_s はスクリーン上の動径方向である。これより、式(6)の積分は、

$$
\begin{aligned}
&\int_S \exp\{-ik(\xi x + \eta y)\}dxdy \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} [\exp\{-ik(\xi r_h \cos\theta + \eta r_h \sin\theta)\}] r_h dr d\theta \\
&= \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} \exp\left\{ -ik\left(\frac{X}{R} r_h \cos\theta + \frac{Y}{R} r_h \sin\theta \right) \right\} d\theta \right] r_h dr \\
&= \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} \exp\left\{ -ikr_h\left(\frac{r_s \cos\phi}{R} \cos\theta + \frac{r_s \sin\phi}{R} \sin\theta \right) \right\} d\theta \right] r_h dr \\
&= \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} \exp\left\{ -i\frac{kr_s}{R} r_h (\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta) \right\} d\theta \right] r_h dr \\
&= \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} \exp\left\{ -i\frac{kr_s}{R} r_h \cos(\phi - \theta) \right\} d\theta \right] r_h dr = \int_0^a \left[2\pi J_0\left(\frac{kr_s}{R} r_h \right) \right] r_h dr = \int_0^a \left[2\pi r_h J_0\left(\frac{kr_s}{R} r_h \right) \right] dr
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となる。ここで、$J_0\left(\frac{kr_s}{R} r_h\right)$ はベッセル関数である。n を整数とすると、ベッセル関数は、

$$
J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2m} \tag{10}
$$

にて定義される。またベッセル関数に関する関係式として、

$$
(-1)^n J_n(x) = J_{-n}(x) \tag{11}
$$

$$
\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x) \right] = x^n J_{n-1}(x) \tag{12}
$$

$$
\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x) \right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{13}
$$

$$
J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \tag{14}
$$

がある。

さて全ての特殊関数は、その母関数のテイラー展開係数から定義すると理解しやすい。ベッセル関数の母関数は次式にて与えられ、その展開係数にベッセル関数が現れる。すなわち、

$$
G_B(x,t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \tag{15}
$$

$$
J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} \exp\left[-i(x\sin\theta - n\theta) \right] d\theta \tag{16}
$$

である。

４ 多重極展開法

１／距離のポテンシャル場を有する物理現象は多数ある。代表的なものは電場や弾性場で、ここでは電場$\phi(\mathbf{r})$を例に取り、

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' \tag{1}$$

と置くことにしよう。ルジャンドル多項式を利用すると、１／距離は、

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r'^2-2rr'\cos\theta+r^2}}=\frac{1}{r\sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta+1}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r'}{r}\right)^n \tag{2}$$

のように展開できる。式(2)を式(1)に代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r'}{r}\right)^n d\mathbf{r}'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int\rho(\mathbf{r}')r'^n P_n(\cos\theta)d\mathbf{r}'=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n\end{aligned} \tag{3}$$

である。ここで、

$$\phi_n=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^{n+1}}\int\rho(\mathbf{r}')r'^n P_n(\cos\theta)d\mathbf{r}' \tag{4}$$

と定義する。つまり、式(3)において、式(1)のポテンシャル場が(1/r)のべきに展開されたことになり、これを多重極展開という。この表式は、"ある程度空間に広がっている$\rho(\mathbf{r}')$" が、"その広がりのさらに遠方に作るポテンシャル場" を導出する場合に効力を発揮する。（さらに数値計算の上では、「多重セル展開法」と併用することによって計算のより高速化が計られている。）

さて、式(4)の個々のべきについて見ていこう。まず n=0 の場合には、

$$\phi_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int\rho(\mathbf{r}')P_0(\cos\theta)d\mathbf{r}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \tag{5}$$

となり、これは$\rho(\mathbf{r}')$が１点に集まったとみなした点電荷のポテンシャルが作る電場に等しい。

次に n=1 の場合には、電気双極子のポテンシャルが得られる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int \rho(\mathbf{r}')\, r' P_1(\cos\theta) d\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int \rho(\mathbf{r}')\, r' \cos\theta d\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int \rho(\mathbf{r}')\, \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'\, d\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{n}\cdot\int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\, d\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{n}\cdot\int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\, d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}
\end{aligned} \tag{6}
$$

となり、電気双極子が遠方に作る電場が導かれる。ここで、$\mathbf{p}$ と $\mathbf{n}$ は、

$$
\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\, d\mathbf{r}' \tag{7}
$$

$$
\mathbf{r} = r\mathbf{n} \tag{8}
$$

にて定義される。$\rho(\mathbf{r}')$ はスカラーポテンシャルであるが、$\mathbf{r}'$ はベクトルである。したがって、式(7)の積分は基本的にベクトルの足合せを意味するので、積分結果もベクトルとなる。

最後に、n=2 の場合には、電気４重極モーメントが得られる。

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\int \rho(\mathbf{r}')\, r'^2\, P_2(\cos\theta) d\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\frac{3}{2}\int \rho(\mathbf{r}')\left\{(r'\cos\theta)^2 - \frac{1}{3}r'^2\right\} d\mathbf{r}' \\
&= \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\int \rho(\mathbf{r}')\left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')^2 - \frac{1}{3}\mathbf{r}'^2\right\} d\mathbf{r}' \\
&= \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\int \rho(\mathbf{r}')\left\{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') - \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\frac{1}{3}\mathbf{r}'^2\right\} d\mathbf{r}' \\
&= \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{n}\cdot\left\{\mathbf{r}'\mathbf{r}' - \frac{1}{3}\mathbf{r}'^2\right\}\cdot\mathbf{n} d\mathbf{r}' = \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{n}
\end{aligned} \tag{9}
$$

ここで、

$$
\hat{\mathbf{Q}} = \int \rho(\mathbf{r}')\left\{\mathbf{r}'\mathbf{r}' - \frac{1}{3}\mathbf{r}'^2\right\} d\mathbf{r}' \tag{10}
$$

である。特に $\mathbf{r}'\mathbf{r}'$ が内積ではなく、ベクトルの積になっている点に注意しよう。つまり、式(10)はテンソル量である。この $\hat{\mathbf{Q}}$ はディアディックと呼ばれる量である。たとえば、２つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ でディアディック $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{ab}$ を作ると、任意のベクトル $\mathbf{p}$ および $\mathbf{q}$ に対して、

$$
\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{q} = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{q})
$$

$$\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{q})$$

と計算される。すなわち、ディアディックとは２つのベクトルを単に並べたテンソルと見ることができる。