スプラインに関するまとめ

by T.Koyama

１．混合スプライン

特徴

・連続した４点を１組にした補間公式を作成し、中央２点間のみを用いる。
・データ点を必ず通る。
・データ点(x_i, y_i)にて、両側の区間の２階微分係数が一致する。
・データは等間隔でなくてはならない。

媒介変数：$u=0$～1

$$
\begin{aligned}
x(u) &= \frac{(u+1)u(u-1)}{6}x_3 - \frac{(u+1)u(u-2)}{2}x_2 + \frac{(u+1)(u-1)(u-2)}{2}x_1 - \frac{u(u-1)(u-2)}{6}x_0 \\
&= \frac{u^3-u}{6}x_3 - \frac{u^3-u^2-2u}{2}x_2 + \frac{u^3-2u^2-u+2}{2}x_1 - \frac{u^3-3u^2+2u}{6}x_0
\end{aligned} \tag{1}
$$

$y, z, \cdots$についても同様。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{3u^2-1}{6}x_3 - \frac{3u^2-2u-2}{2}x_2 + \frac{3u^2-4u-1}{2}x_1 - \frac{3u^2-6u+2}{6}x_0 \\
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= ux_3 - (3u-1)x_2 + (3u-2)x_1 - (u-1)x_0
\end{aligned} \tag{2}
$$

および

$$
\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u=0} = -\frac{1}{6}x_3 + x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_0 = \frac{1}{6}(-x_3 + 6x_2 - 3x_1 - 2x_0)
$$

$$
\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u=1} = \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{2}x_2 - x_1 + \frac{1}{6}x_0 = \frac{1}{6}(2x_3 + 3x_2 - 6x_1 + x_0)
$$

$$
\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_{u=0} = x_2 - 2x_1 + x_0
$$

$$
\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_{u=1} = x_2 - 2x_1 + x_0
$$

より$u=0$と$u=1$における勾配は一致しない。したがって左右にデータ点の勾配は必ずしも一致しないので、曲線はあまりなめらかではないことになる。しかし、２階微分は一致し、さらに差分に対応している。

２．ベーススプライン

特徴

・データ点は等間隔。
・データ点で、１階および２階微分が一致する。
・補間が連続的になるが、データ点を必ずしも通らない。
・連続した４点から３次式を求め、中央２点間を補間。

媒介変数：$u = 0〜1$

$$x(u) = \frac{u^3}{6}x_3 + \frac{-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1}{6}x_2 + \frac{3u^3 - 6u^2 + 4}{6}x_1 + \frac{(1-u)^3}{6}x_0 \tag{3}$$

（１）はじめの区間

$$x(u) = \frac{u^3}{6}x_3 + \left(-\frac{11}{12}u^3 + \frac{3}{2}u^2\right)x_2 + \left(\frac{21}{12}u^3 - \frac{9}{2}u^2 + 3u\right)x_1 + (1-u)^3 x_0 \tag{4}$$

（２）２番目の区間

$$x(u) = \frac{u^3}{6}x_3 + \left(-\frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}\right)x_2 + \left(\frac{7}{12}u^3 - \frac{5}{4}u^2 + \frac{1}{4}u + \frac{7}{12}\right)x_1 + \frac{(1-u)^3}{4}x_0 \tag{5}$$

式(3)より、

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u^2}{2}x_3 + \frac{-3u^2 + 2u + 1}{2}x_2 + \frac{3u^2 - 4u}{2}x_1 - \frac{(1-u)^2}{2}x_0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = ux_3 + (-3u+1)x_2 + (3u-2)x_1 + (1-u)x_0$$

であるので、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_0 = \frac{x_2 - x_0}{2}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u=1} = \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{x_3 - x_1}{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_{u=0} = x_2 - 2x_1 + x_0$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_{u=1} = x_3 - 2x_2 + x_1$$

となる。したがって、ベーススプラインは、１階微分および２階微分ともに差分と対応している。

３．雲形定規的スプライン

特徴

・データ点を必ず通る。

・データ点(x_i, y_i)にて、両側の区間の１階微分係数が一致する。

媒介変数：$u = 0〜1$

$$
\begin{aligned}
x_i(u) &= \frac{1}{2}u^2(u-1)x_{i+2} + \frac{1}{2}u(-3u^2+4u+1)x_{i+1} + \frac{1}{2}(u-1)(3u^2-2u-2)x_i - \frac{1}{2}u(u-1)^2 x_{i-1} \\
&= \frac{1}{2}(u^3-u^2)x_{i+2} + \frac{1}{2}(-3u^3+4u^2+u)x_{i+1} + \frac{1}{2}(3u^3-5u^2+2)x_i - \frac{1}{2}(u^3-2u^2+u)x_{i-1} \\
&\qquad (i = 1,2,3,\cdots,N-1)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\frac{\partial x_i}{\partial u} = \frac{1}{2}(3u^2-2u)x_{i+2} + \frac{1}{2}(-9u^2+8u+1)x_{i+1} + \frac{1}{2}(9u^2-10u)x_i - \frac{1}{2}(3u^2-4u+1)x_{i-1}
$$

（１）始めの区間

$$
\begin{aligned}
x_0(u) &= \frac{1}{10}u^2(1+u)x_3 + \frac{1}{10}u(u+1)(5-3u)x_2 \\
&\quad + \frac{1}{10}(u+1)(3u^2-10u+10)x_1 - \frac{1}{10}u(u^2-4u+5)x_0
\end{aligned}
\qquad (-1 \le u \le 0)
\tag{7}
$$

$$
\frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{1}{10}(3u^2+2u)x_3 + \frac{1}{10}(-9u^2+4u+5)x_2 + \frac{1}{10}(9u^2-14u)x_1 - \frac{1}{10}(3u^2-8u+5)x_0
$$

（２）終わりの区間

$$
\begin{aligned}
x_N(u) &= \frac{1}{10}(u-1)(u^2+2u+2)x_N - \frac{1}{10}(u-2)(3u^2+4u+3)x_{N-1} \\
&\quad + \frac{1}{10}(u-1)(u-2)(3u+2)x_{N-2} - \frac{1}{10}(u-1)^2(u-2)x_{N-3}
\end{aligned}
\qquad (1 \le u \le 2)
\tag{8}
$$

$$
\frac{\partial x_N}{\partial u} = \frac{1}{10}(3u^2+2u)x_N - \frac{1}{10}(9u^2-4u-5)x_{N-1} + \frac{1}{10}(9u^2-14u)x_{N-2} - \frac{1}{10}(3u^2-8u+5)x_{N-3}
$$

式(6)より、

$$
\frac{\partial x_i}{\partial u} = \frac{1}{2}(3u^2-2u)x_{i+2} + \frac{1}{2}(-9u^2+8u+1)x_{i+1} + \frac{1}{2}(9u^2-10u)x_i - \frac{1}{2}(3u^2-4u+1)x_{i-1}
$$

$$
\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{1}{2}x_{i+1} - \frac{1}{2}x_{i-1} = \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2}
$$

$$
\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_{u=1} = \frac{1}{2}x_{i+2} - \frac{1}{2}x_i = \frac{x_{i+2}-x_i}{2}
$$

となり、１階微分が差分に対応していることがわかる。一方、２階微分は、

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = (3u-1)x_{i+2} + (-9u+4)x_{i+1} + (9u-5)x_i - (3u-2)x_{i-1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\right)_{u=0} = -x_{i+2} + 4x_{i+1} - 5x_i + 2x_{i-1}$$

$$= -x_{i+2} + 2x_{i+1} - x_i + 2x_{i+1} - 4x_i + 2x_{i-1} = -(x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i) + 2(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\right)_{u=1} = 2x_{i+2} - 5x_{i+1} + 4x_i - x_{i-1}$$

$$= 2x_{i+2} - 4x_{i+1} + 2x_i - x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = 2(x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i) - (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

と計算され、一致していない。

なお式(6)〜(8)の u に関する微分は、

媒介変数：$u = 0$〜1

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \frac{1}{2}(3u^2 - 2u)x_{i+2} + \frac{1}{2}(-9u^2 + 8u + 1)x_{i+1} + \frac{1}{2}(9u^2 - 10u)x_i - \frac{1}{2}(3u^2 - 4u + 1)x_{i-1}$$

（１）始めの区間：$u = \text{-}1$〜0

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{1}{10}(3u^2 + 2u)x_3 + \frac{1}{10}(-9u^2 + 4u + 5)x_2 + \frac{1}{10}(9u^2 - 14u)x_1 - \frac{1}{10}(3u^2 - 8u + 5)x_0$$

（２）終わりの区間：$u = 1$〜2

$$\frac{\partial x_N}{\partial u} = \frac{1}{10}(3u^2 + 2u)x_N - \frac{1}{10}(9u^2 - 4u - 5)x_{N-1} + \frac{1}{10}(9u^2 - 14u)x_{N-2} - \frac{1}{10}(3u^2 - 8u + 5)x_{N-3}$$

にて与えられる。