弾性定数の対称性について

(機械工学表記**)**

by ***T. Koyama***

１．弾性定数の定義

広義のフックの法則を式(1)にて定義する。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \tag{1}$$

弾性定数には、式(2)の関係が成立する。

$$C_{ijkl} = C_{jikl}\ , C_{ijkl} = C_{ijlk}\ , C_{ijkl} = C_{klij} \tag{2}$$

これより、独立な弾性定数に基づき、式(1)を書き下すと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ * & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ * & * & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ * & * & * & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ * & * & * & * & C_{3131} & C_{3112} \\ * & * & * & * & * & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \tag{3}$$

なお ＊ はマトリックスの対称要素を表す。したがって、独立な弾性定数は、最大 21 個である。次に結晶の対称性による独立な弾性定数の決定方法について考察する。

２．独立な弾性定数の決定

まず、結晶の対称性を数式的に扱うために直交座標の回転による座標変換公式を導く。旧直角座標系におけるベクトルPの成分を(x_1, x_2, x_3)とし、変換後の新座標系におけるベクトルP' の成分を(x_1', x_2', x_3')と置く。また両座標系の原点は一致させるものとする。この両座標系間の関係を導くために、方向余弦l_{ij}を以下のように定義する。

$$\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

方向余弦の意味は以下のように理解することができる。いま、$P(x_1, x_2, x_3)$が与えられて、$P'(x_1', x_2', x_3')$を導く場合を考える。旧座標系において(x_1, x_2, x_3)を成分とするベクトルPは当然ながら$(x_1, 0, 0)$，$(0, x_2, 0)$および$(0, 0, x_3)$の和である。これら３つのベクトルは旧座標系ではその座標軸上に存在するが、新座標系では必ずしも座標軸上に存在するとは限らない。したがって$(x_1, 0, 0)$，$(0, x_2, 0)$および$(0, 0, x_3)$を、さらにそれぞれ新座標系成分に分解してやらなくてはならない。旧座標系x_1軸上のベクトル$(x_1, 0, 0)$を、新座標系で見た場合の成分は$(x_1\cos(\theta_{11}), x_1\cos(\theta_{21}), x_1\cos(\theta_{31}))$にて与えられる。$\theta_{ij}$は旧座標系$x_j$軸と新座標系$x_i$軸との間の角度である。同様に $(0, x_2, 0)$ および $(0, 0, x_3)$ の新座標成分は

$(x_2\cos(\theta_{12}), x_2\cos(\theta_{22}), x_2\cos(\theta_{32}))$ および $(x_3\cos(\theta_{13}), x_3\cos(\theta_{23}), x_3\cos(\theta_{33}))$ にて与えられる。
以上を行列を用いて表記すると以下のようになる。

$$\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1\cos(\theta_{11}) + x_2\cos(\theta_{12}) + x_3\cos(\theta_{13}) \\ x_1\cos(\theta_{21}) + x_2\cos(\theta_{22}) + x_3\cos(\theta_{23}) \\ x_1\cos(\theta_{31}) + x_2\cos(\theta_{32}) + x_3\cos(\theta_{33}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{11}) & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13}) \\ \cos(\theta_{21}) & \cos(\theta_{22}) & \cos(\theta_{23}) \\ \cos(\theta_{31}) & \cos(\theta_{32}) & \cos(\theta_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式(4)と式(5)を比較することにより、方向余弦l_{ij}は式(6)にて与えられる。

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{11}) & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13}) \\ \cos(\theta_{21}) & \cos(\theta_{22}) & \cos(\theta_{23}) \\ \cos(\theta_{31}) & \cos(\theta_{32}) & \cos(\theta_{33}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(6)右辺のθの添え字は、前が新座標系の軸を、後が旧座標系の軸を表す。これより、方向余弦l_{ij}には、内積の定義から次の性質が存在する。

$$\begin{aligned} l_{ik}l_{ik} &= 1 \\ l_{ik}l_{jk} &= 0 (i \neq j) \\ l_{ki}l_{ki} &= 1 \\ l_{ki}l_{kj} &= 0 (i \neq j) \end{aligned} \quad (7)$$

例：
$$\begin{aligned} l_{i1}l_{i1} &= l_{11}l_{11} + l_{21}l_{21} + l_{31}l_{31} = 1 \\ l_{i1}l_{j1} &= l_{11}l_{21} + l_{11}l_{31} + l_{21}l_{11} + l_{21}l_{31} + l_{31}l_{11} + l_{31}l_{21} = 0 \end{aligned}$$

この方向余弦l_{ij}を用いることによて、歪および応力成分の座標変換公式は、それぞれ式(8)および式(9)にて与えられる。

$$e_{ij}' = l_{ik}l_{jl}e_{kl} \quad (8)$$

例：
$$\begin{aligned} e_{11}' &= l_{1k}l_{1l}e_{kl} \\ &= l_{11}l_{11}e_{11} + l_{11}l_{12}e_{12} + l_{11}l_{13}e_{13} + l_{12}l_{11}e_{21} + l_{12}l_{12}e_{22} + l_{12}l_{13}e_{23} + l_{13}l_{11}e_{31} + l_{13}l_{12}e_{32} + l_{13}l_{13}e_{33} \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij}' = l_{ik}l_{jl}\sigma_{kl} \quad (9)$$

以上の歪および応力成分の座標変換公式を用いることにより、結晶の対称性による独立な弾性定数は以下のように計算することができる。

３．斜方晶における独立な弾性定数の導き方

斜方晶は直方体対称性を有する。したがって、x_1x_2, x_2x_3,およびx_1x_2面に対する座標変換に

おいて、弾性体の応力および歪は不変である。この条件により、斜方晶における独立な弾性定数が導くことが出来る。

3-1 x_1x_2面における対称性

この対称性は、$x_1 = x_1^{'}, x_2 = x_2^{'}, x_3 = -x_3^{'}$と変換した場合、弾性定数$C_{ijkl}$が不変であることを意味する。この場合の方向余弦$l_{ij}$は次式にて与えられる。

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{11}) & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13}) \\ \cos(\theta_{21}) & \cos(\theta_{22}) & \cos(\theta_{23}) \\ \cos(\theta_{31}) & \cos(\theta_{32}) & \cos(\theta_{33}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(0) & \cos(90) & \cos(90) \\ \cos(90) & \cos(0) & \cos(90) \\ \cos(-90) & \cos(-90) & \cos(180) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

これより、歪および応力成分の座標変換公式(8)(9)を用いることによって、以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{'} &= l_{1k}l_{1l}\sigma_{kl} = l_{11}l_{11}\sigma_{11} = \sigma_{11} \\ \sigma_{22}^{'} &= l_{2k}l_{2l}\sigma_{kl} = l_{22}l_{22}\sigma_{22} = \sigma_{22} \\ \sigma_{33}^{'} &= l_{3k}l_{3l}\sigma_{kl} = l_{33}l_{33}\sigma_{33} = \sigma_{33} \\ \sigma_{23}^{'} &= l_{2k}l_{3l}\sigma_{kl} = l_{22}l_{33}\sigma_{23} = -\sigma_{23} \\ \sigma_{13}^{'} &= l_{1k}l_{3l}\sigma_{kl} = l_{11}l_{33}\sigma_{13} = -\sigma_{13} \\ \sigma_{12}^{'} &= l_{1k}l_{2l}\sigma_{kl} = l_{11}l_{22}\sigma_{12} = \sigma_{12} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} e_{11}^{'} &= l_{1k}l_{1l}e_{kl} = l_{11}l_{11}e_{11} = e_{11} \\ e_{22}^{'} &= l_{2k}l_{2l}e_{kl} = l_{22}l_{22}e_{22} = e_{22} \\ e_{33}^{'} &= l_{3k}l_{3l}e_{kl} = l_{33}l_{33}e_{33} = e_{33} \\ e_{23}^{'} &= l_{2k}l_{3l}e_{kl} = l_{22}l_{33}e_{23} = -e_{23} \\ e_{13}^{'} &= l_{1k}l_{3l}e_{kl} = l_{11}l_{33}e_{13} = -e_{13} \\ e_{12}^{'} &= l_{1k}l_{2l}e_{kl} = l_{11}l_{22}e_{12} = e_{12} \end{aligned} \tag{12}$$

新座標系においても、フックの法則は成立するので、$\sigma_{ij}^{'} = C_{ijkl}e_{kl}^{'}$に式(11)と(12)を代入することにより、次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\sigma'_{11} = C_{11kl}e'_{kl} \\
&= C_{1111}e'_{11} + C_{1112}e'_{12} + C_{1113}e'_{13} + C_{1121}e'_{21} + C_{1122}e'_{22} + C_{1123}e'_{23} + C_{1131}e'_{31} + C_{1132}e'_{32} + C_{1133}e'_{33} \\
&= C_{1111}e_{11} + C_{1112}e_{12} + (-C_{1113})e_{13} + C_{1121}e_{21} + C_{1122}e_{22} + (-C_{1123})e_{23} + (-C_{1131})e_{31} + (-C_{1132})e_{32} + C_{1133}e'_{33} \\
&= \sigma_{11} \\
&= C_{1111}e_{11} + C_{1112}e_{12} + C_{1113}e_{13} + C_{1121}e_{21} + C_{1122}e_{22} + C_{1123}e_{23} + C_{1131}e_{31} + C_{1132}e_{32} + C_{1133}e_{33}
\end{aligned}$$

これより、$C_{1113} = 0, C_{1123} = 0$となる。
同様に、$C_{2213} = 0$, $C_{2223} = 0$, $C_{3313} = 0$, $C_{3323} = 0$, $C_{1213} = 0$, $C_{1223} = 0$が得られる。
また、

$$\begin{aligned}
&\sigma'_{13} = C_{13kl}e'_{kl} \\
&= C_{1311}e'_{11} + C_{1312}e'_{12} + C_{1313}e'_{13} + C_{1321}e'_{21} + C_{1322}e'_{22} + C_{1323}e'_{23} + C_{1331}e'_{31} + C_{1332}e'_{32} + C_{1333}e'_{33} \\
&= C_{1311}e_{11} + C_{1312}e_{12} + (-C_{1313})e_{13} + C_{1321}e_{21} + C_{1322}e_{22} + (-C_{1323})e_{23} + (-C_{1331})e_{31} + (-C_{1332})e_{32} + C_{1333}e'_{33} \\
&= -\sigma_{13} \\
&= -(C_{1311}e_{11} + C_{1312}e_{12} + C_{1313}e_{13} + C_{1321}e_{21} + C_{1322}e_{22} + C_{1323}e_{23} + C_{1331}e_{31} + C_{1332}e_{32} + C_{1333}e_{33})
\end{aligned}$$

より、$C_{1311} = 0$, $C_{1312} = 0$, $C_{1321} = 0$, $C_{1322} = 0$, $C_{1333} = 0$となる。
同様に、$C_{2311} = 0$, $C_{2312} = 0$, $C_{2321} = 0$, $C_{2322} = 0$, $C_{2333} = 0$である。
以上をまとめると、０となる弾性定数は以下のようになる。

$$C_{1113} = 0\ ,\ C_{1123} = 0\ ,\ C_{2213} = 0\ ,\ C_{2223} = 0\ ,\ C_{3313} = 0\ ,\ C_{3323} = 0\ ,\ C_{1213} = 0\ ,\ C_{1223} = 0 \qquad (13)$$

これより、独立な弾性定数は 13 個となり、式(3)は次式にて与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ * & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2212} \\ * & * & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3312} \\ * & * & * & C_{2323} & C_{2331} & 0 \\ * & * & * & * & C_{3131} & 0 \\ * & * & * & * & * & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

3-2 x_2x_3面における対称性

　この対称性は、$x_1 = -x'_1, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3$と変換した場合、弾性定数$C_{ijkl}$が不変であることを意味する。この場合の方向余弦$l_{ij}$は次式にて与えられる。

$$
\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{11}) & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13}) \\ \cos(\theta_{21}) & \cos(\theta_{22}) & \cos(\theta_{23}) \\ \cos(\theta_{31}) & \cos(\theta_{32}) & \cos(\theta_{33}) \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \cos(180) & \cos(-90) & \cos(-90) \\ \cos(90) & \cos(0) & \cos(90) \\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}
$$

これより、歪および応力成分の座標変換公式(8)(9)を用いることによって、以下の関係式を得る。

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= l_{1k} l_{1l} \sigma_{kl} = l_{11} l_{11} \sigma_{11} = \sigma_{11} \\
\sigma'_{22} &= l_{2k} l_{2l} \sigma_{kl} = l_{22} l_{22} \sigma_{22} = \sigma_{22} \\
\sigma'_{33} &= l_{3k} l_{3l} \sigma_{kl} = l_{33} l_{33} \sigma_{33} = \sigma_{33} \\
\sigma'_{23} &= l_{2k} l_{3l} \sigma_{kl} = l_{22} l_{33} \sigma_{23} = \sigma_{23} \\
\sigma'_{13} &= l_{1k} l_{3l} \sigma_{kl} = l_{11} l_{33} \sigma_{13} = -\sigma_{13} \\
\sigma'_{12} &= l_{1k} l_{2l} \sigma_{kl} = l_{11} l_{22} \sigma_{12} = -\sigma_{12}
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
e'_{11} &= l_{1k} l_{1l} e_{kl} = l_{11} l_{11} e_{11} = e_{11} \\
e'_{22} &= l_{2k} l_{2l} e_{kl} = l_{22} l_{22} e_{22} = e_{22} \\
e'_{33} &= l_{3k} l_{3l} e_{kl} = l_{33} l_{33} e_{33} = e_{33} \\
e'_{23} &= l_{2k} l_{3l} e_{kl} = l_{22} l_{33} e_{23} = e_{23} \\
e'_{13} &= l_{1k} l_{3l} e_{kl} = l_{11} l_{33} e_{13} = -e_{13} \\
e'_{12} &= l_{1k} l_{2l} e_{kl} = l_{11} l_{22} e_{12} = -e_{12}
\end{aligned} \tag{17}
$$

新座標系においても、フックの法則は成立するので、$\sigma'_{ij} = C_{ijkl} e'_{kl}$ に式(16)と(17)を代入することにより、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= C_{11kl} e'_{kl} \\
&= C_{1111} e'_{11} + C_{1112} e'_{12} + C_{1113} e'_{13} + C_{1121} e'_{21} + C_{1122} e'_{22} + C_{1123} e'_{23} + C_{1131} e'_{31} + C_{1132} e'_{32} + C_{1133} e'_{33} \\
&= C_{1111} e_{11} + (-C_{1112}) e_{12} + (-C_{1113}) e_{13} + (-C_{1121}) e_{21} + C_{1122} e_{22} + C_{1123} e_{23} + (-C_{1131}) e_{31} + C_{1132} e_{32} + C_{1133} e'_{33} \\
&= \sigma_{11} \\
&= C_{1111} e_{11} + C_{1112} e_{12} + C_{1113} e_{13} + C_{1121} e_{21} + C_{1122} e_{22} + C_{1123} e_{23} + C_{1131} e_{31} + C_{1132} e_{32} + C_{1133} e_{33}
\end{aligned}
$$

これより、$C_{1112} = 0, C_{1113} = 0$ となる。
同様に、$C_{2212} = 0$, $C_{2213} = 0$, $C_{3312} = 0$, $C_{3313} = 0$, $C_{2312} = 0$, $C_{2313} = 0$ が得られる。
また、

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{13} &= C_{13kl}e'_{kl} \\
&= C_{1311}e'_{11} + C_{1312}e'_{12} + C_{1313}e'_{13} + C_{1321}e'_{21} + C_{1322}e'_{22} + C_{1323}e'_{23} + C_{1331}e'_{31} + C_{1332}e'_{32} + C_{1333}e'_{33} \\
&= C_{1311}e_{11} + (-C_{1312})e_{12} + (-C_{1313})e_{13} + (-C_{1321})e_{21} + C_{1322}e_{22} + C_{1323}e_{23} + (-C_{1331})e_{31} + C_{1332}e_{32} + C_{1333}e'_{33} \\
&= -\sigma_{13} \\
&= -(C_{1311}e_{11} + C_{1312}e_{12} + C_{1313}e_{13} + C_{1321}e_{21} + C_{1322}e_{22} + C_{1323}e_{23} + C_{1331}e_{31} + C_{1332}e_{32} + C_{1333}e_{33})
\end{aligned}
$$

より、$C_{1311} = 0$, $C_{1322} = 0$, $C_{1323} = 0$, $C_{1332} = 0$, $C_{1333} = 0$ となる。
同様に、$C_{1211} = 0$, $C_{1222} = 0$, $C_{1223} = 0$, $C_{1232} = 0$, $C_{1233} = 0$ である。
以上をまとめると、0 となる弾性定数は以下のようになる。

$$
C_{1112} = 0,\ C_{1113} = 0,\ C_{2212} = 0,\ C_{2213} = 0,\ C_{3312} = 0,\ C_{3313} = 0,\ C_{2312} = 0,\ C_{2313} = 0 \qquad (18)
$$

これより、独立な弾性定数は 13 個となり、式(3)は次式にて与えられる。

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & 0 & 0 \\
* & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & 0 & 0 \\
* & * & C_{3333} & C_{3323} & 0 & 0 \\
* & * & * & C_{2323} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & C_{3131} & C_{3112} \\
* & * & * & * & * & C_{1212}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix}
\qquad (19)
$$

3-3 x_1x_3面における対称性

この対称性は、$x_1 = x'_1, x_2 = -x'_2, x_3 = x'_3$ と変換した場合、弾性定数C_{ijkl}が不変であることを意味する。この場合の方向余弦l_{ij}は次式にて与えられる。

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}
&=
\begin{bmatrix} \cos(\theta_{11}) & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13}) \\ \cos(\theta_{21}) & \cos(\theta_{22}) & \cos(\theta_{23}) \\ \cos(\theta_{31}) & \cos(\theta_{32}) & \cos(\theta_{33}) \end{bmatrix} \\
&=
\begin{bmatrix} \cos(0) & \cos(90) & \cos(90) \\ \cos(-90) & \cos(180) & \cos(-90) \\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

これより、歪および応力成分の座標変換公式(8)(9)を用いることによって、以下の関係式を得る。

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= l_{1k}l_{1l}\sigma_{kl} = l_{11}l_{11}\sigma_{11} = \sigma_{11} \\
\sigma'_{22} &= l_{2k}l_{2l}\sigma_{kl} = l_{22}l_{22}\sigma_{22} = \sigma_{22} \\
\sigma'_{33} &= l_{3k}l_{3l}\sigma_{kl} = l_{33}l_{33}\sigma_{33} = \sigma_{33} \\
\sigma'_{23} &= l_{2k}l_{3l}\sigma_{kl} = l_{22}l_{33}\sigma_{23} = -\sigma_{23} \\
\sigma'_{13} &= l_{1k}l_{3l}\sigma_{kl} = l_{11}l_{33}\sigma_{13} = \sigma_{13} \\
\sigma'_{12} &= l_{1k}l_{2l}\sigma_{kl} = l_{11}l_{22}\sigma_{12} = -\sigma_{12}
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
e'_{11} &= l_{1k}l_{1l}e_{kl} = l_{11}l_{11}e_{11} = e_{11} \\
e'_{22} &= l_{2k}l_{2l}e_{kl} = l_{22}l_{22}e_{22} = e_{22} \\
e'_{33} &= l_{3k}l_{3l}e_{kl} = l_{33}l_{33}e_{33} = e_{33} \\
e'_{23} &= l_{2k}l_{3l}e_{kl} = l_{22}l_{33}e_{23} = -e_{23} \\
e'_{13} &= l_{1k}l_{3l}e_{kl} = l_{11}l_{33}e_{13} = e_{13} \\
e'_{12} &= l_{1k}l_{2l}e_{kl} = l_{11}l_{22}e_{12} = -e_{12}
\end{aligned} \tag{22}
$$

新座標系においても、フックの法則は成立するので、$\sigma'_{ij} = C_{ijkl}e'_{kl}$ に式(21)と(22)を代入することにより、次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_{11} = C_{11kl}e'_{kl} \\
&= C_{1111}e'_{11} + C_{1112}e'_{12} + C_{1113}e'_{13} + C_{1121}e'_{21} + C_{1122}e'_{22} + C_{1123}e'_{23} + C_{1131}e'_{31} + C_{1132}e'_{32} + C_{1133}e'_{33} \\
&= C_{1111}e_{11} + (-C_{1112})e_{12} + C_{1113}e_{13} + (-C_{1121})e_{21} + C_{1122}e_{22} + (-C_{1123})e_{23} + C_{1131}e_{31} + (-C_{1132})e_{32} + C_{1133}e'_{33} \\
&= \sigma_{11} \\
&= C_{1111}e_{11} + C_{1112}e_{12} + C_{1113}e_{13} + C_{1121}e_{21} + C_{1122}e_{22} + C_{1123}e_{23} + C_{1131}e_{31} + C_{1132}e_{32} + C_{1133}e_{33}
\end{aligned}
$$

これより、$C_{1112} = 0, C_{1123} = 0$ となる。
同様に、$C_{2212} = 0$, $C_{2223} = 0$, $C_{3312} = 0$, $C_{3323} = 0$, $C_{1312} = 0$, $C_{1323} = 0$ が得られる。
また、

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_{12} = C_{12kl}e'_{kl} \\
&= C_{1211}e'_{11} + C_{1212}e'_{12} + C_{1213}e'_{13} + C_{1221}e'_{21} + C_{1222}e'_{22} + C_{1223}e'_{23} + C_{1231}e'_{31} + C_{1232}e'_{32} + C_{1233}e'_{33} \\
&= C_{1211}e_{11} + (-C_{1212})e_{12} + C_{1213}e_{13} + (-C_{1221})e_{21} + C_{1222}e_{22} + (-C_{1223})e_{23} + C_{1231}e_{31} + (-C_{1232})e_{32} + C_{1233}e'_{33} \\
&= -\sigma_{12} \\
&= -(C_{1211}e_{11} + C_{1212}e_{12} + C_{1213}e_{13} + C_{1221}e_{21} + C_{1222}e_{22} + C_{1223}e_{23} + C_{1231}e_{31} + C_{1232}e_{32} + C_{1233}e_{33})
\end{aligned}
$$

より、$C_{1211} = 0$, $C_{1213} = 0$, $C_{1222} = 0$, $C_{1231} = 0$, $C_{1233} = 0$ となる。
同様に、$C_{2311} = 0$, $C_{2313} = 0$, $C_{2322} = 0$, $C_{2331} = 0$, $C_{2333} = 0$ である。
以上をまとめると、０となる弾性定数は以下のようになる。

$$
C_{1112} = 0 , C_{1123} = 0 , C_{2212} = 0 , C_{2223} = 0 , C_{3312} = 0 , C_{3323} = 0 , C_{1312} = 0 , C_{1323} = 0 \tag{23}
$$

これより、独立な弾性定数は 13 個となり、式(3)は次式にて与えられる。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & C_{1131} & 0\\ * & C_{2222} & C_{2233} & 0 & C_{2231} & 0\\ * & * & C_{3333} & 0 & C_{3331} & 0\\ * & * & * & C_{2323} & 0 & C_{2312}\\ * & * & * & * & C_{3131} & 0\\ * & * & * & * & * & C_{1212}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ 2e_{23}\\ 2e_{31}\\ 2e_{12}\end{pmatrix} \tag{24}$$

以上より、式(14)(19)(24)を総合することにより、斜方晶の弾性定数は次式にて与えられる。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0\\ * & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0\\ * & * & C_{3333} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & C_{2323} & 0 & 0\\ * & * & * & * & C_{3131} & 0\\ * & * & * & * & * & C_{1212}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ 2e_{23}\\ 2e_{31}\\ 2e_{12}\end{pmatrix} \tag{25}$$

４．立方晶の弾性定数の導出

立方晶は、斜方晶の対称性に加え、回転対称性も有する。つまり、座標変換 $x_1 = x_2', x_2 = -x_1', x_3 = x_3'$、$x_1 = x_1', x_2 = x_3', x_3 = -x_2'$、および $x_1 = -x_3', x_2 = x_2', x_3 = x_1'$ において応力・歪状態は不変である。

4-1 $x_1 = x_2', x_2 = -x_1', x_3 = x_3'$ における独立な弾性定数の決定

まず、方向余弦l_{ij}は次式にて与えられる。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}l_{11} & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\cos(\theta_{11}) & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13})\\ \cos(\theta_{21}) & \cos(\theta_{22}) & \cos(\theta_{23})\\ \cos(\theta_{31}) & \cos(\theta_{32}) & \cos(\theta_{33})\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos(90) & \cos(0) & \cos(90)\\ \cos(180) & \cos(90) & \cos(90)\\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{26}$$

これより、歪および応力成分の座標変換公式(8)(9)を用いることによって、以下の関係式を得る。

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= l_{1k} l_{1l} \sigma_{kl} = l_{12} l_{12} \sigma_{22} = \sigma_{22} \\
\sigma'_{22} &= l_{2k} l_{2l} \sigma_{kl} = l_{21} l_{21} \sigma_{11} = \sigma_{11} \\
\sigma'_{33} &= l_{3k} l_{3l} \sigma_{kl} = l_{33} l_{33} \sigma_{33} = \sigma_{33} \\
\sigma'_{23} &= l_{2k} l_{3l} \sigma_{kl} = l_{21} l_{33} \sigma_{13} = -\sigma_{13} \\
\sigma'_{13} &= l_{1k} l_{3l} \sigma_{kl} = l_{12} l_{33} \sigma_{23} = \sigma_{23} \\
\sigma'_{12} &= l_{1k} l_{2l} \sigma_{kl} = l_{12} l_{21} \sigma_{21} = -\sigma_{21}
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
e'_{11} &= l_{1k} l_{1l} e_{kl} = l_{12} l_{12} e_{22} = e_{22} \\
e'_{22} &= l_{2k} l_{2l} e_{kl} = l_{21} l_{21} e_{11} = e_{11} \\
e'_{33} &= l_{3k} l_{3l} e_{kl} = l_{33} l_{33} e_{33} = e_{33} \\
e'_{23} &= l_{2k} l_{3l} e_{kl} = l_{21} l_{33} e_{13} = -e_{13} \\
e'_{13} &= l_{1k} l_{3l} e_{kl} = l_{12} l_{33} e_{23} = e_{23} \\
e'_{12} &= l_{1k} l_{2l} e_{kl} = l_{12} l_{21} e_{21} = -e_{21}
\end{aligned} \tag{28}
$$

新座標系においても、フックの法則は成立するので、$\sigma'_{ij} = C_{ijkl} e'_{kl}$ に式(27)と(28)を代入することにより、次式を得る。なお斜方晶において既に０となっている弾性定数成分は０とおいた。

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_{11} = C_{11kl} e'_{kl} \\
&= C_{1111} e'_{11} + C_{1122} e'_{22} + C_{1133} e'_{33} = C_{1111} e_{22} + C_{1122} e_{11} + C_{1133} e_{33} \\
&= C_{1122} e_{11} + C_{1111} e_{22} + C_{1133} e_{33} \\
&= \sigma_{22} \\
&= C_{2211} e_{11} + C_{2222} e_{22} + C_{2233} e_{33}
\end{aligned}
$$

これより、 $C_{1111} = C_{2222}$, $C_{1133} = C_{2233}$

また、

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_{22} = C_{22kl} e'_{kl} \\
&= C_{2211} e'_{11} + C_{2222} e'_{22} + C_{2233} e'_{33} = C_{2211} e_{22} + C_{2222} e_{11} + C_{2233} e_{33} \\
&= C_{2222} e_{11} + C_{2211} e_{22} + C_{2233} e_{33} \\
&= \sigma_{11} \\
&= C_{1111} e_{11} + C_{1122} e_{22} + C_{1133} e_{33}
\end{aligned}
$$

これより、 $C_{2222} = C_{1111}$, $C_{2233} = C_{1133}$

また、

$$\sigma'_{33} = C_{33kl}e'_{kl}$$
$$= C_{3311}e'_{11} + C_{3322}e'_{22} + C_{3333}e'_{33} = C_{3311}e_{22} + C_{3322}e_{11} + C_{3333}e_{33}$$
$$= C_{3322}e_{11} + C_{3311}e_{22} + C_{3333}e_{33}$$
$$= \sigma_{33}$$
$$= C_{3311}e_{11} + C_{3322}e_{22} + C_{3333}e_{33}$$

これより、$C_{3322} = C_{3311}$

また、

$$\sigma'_{12} = C_{12kl}e'_{kl} = 2C_{1212}e'_{12}$$
$$= (-2C_{1212})e_{12}$$
$$= -\sigma_{21} = -\sigma_{12}$$
$$= -2C_{1212}e_{12}$$

また、

$$\sigma'_{13} = C_{13kl}e'_{kl} = 2C_{1313}e'_{13}$$
$$= 2C_{1313}e_{23}$$
$$= \sigma_{23}$$
$$= 2C_{2323}e_{23}$$

これより、$C_{1313} = C_{2323}$

また、

$$\sigma'_{23} = C_{23kl}e'_{kl} = 2C_{2323}e'_{23}$$
$$= -2C_{2323}e_{13}$$
$$== -\sigma_{13}$$
$$= -2C_{1313}e_{13}$$

これより、$C_{2323} = C_{1313}$である。

弾性定数に関する関係式は以下のようになる。

$$C_{1111} = C_{2222}\ ,\ C_{1133} = C_{2233}\ ,\ C_{1313} = C_{2323} \tag{29}$$

これより、独立な弾性定数は次式にて与えられる。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\\sigma_{22}\\\sigma_{33}\\\sigma_{23}\\\sigma_{31}\\\sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{1111}&C_{1122}&C_{1133}&0&0&0\\ *&C_{1111}&C_{1133}&0&0&0\\ *&*&C_{3333}&0&0&0\\ *&*&*&C_{3131}&0&0\\ *&*&*&*&C_{3131}&0\\ *&*&*&*&*&C_{1212}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}\\e_{22}\\e_{33}\\2e_{23}\\2e_{31}\\2e_{12}\end{pmatrix} \tag{30}$$

式(33)の条件は正方晶に対応するので、正方晶における独立な弾性定数は 6 個になり、正方晶の弾性率は式(31)にて与えられる。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\\sigma_{22}\\\sigma_{33}\\\sigma_{23}\\\sigma_{31}\\\sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\ *&C_{11}&C_{13}&0&0&0\\ *&*&C_{33}&0&0&0\\ *&*&*&C_{44}&0&0\\ *&*&*&*&C_{44}&0\\ *&*&*&*&*&C_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}\\e_{22}\\e_{33}\\2e_{23}\\2e_{31}\\2e_{12}\end{pmatrix} \tag{31}$$

4-2 $x_1 = x_1^{'}, x_2 = x_3^{'}, x_3 = -x_2^{'}$ における独立な弾性定数の決定

この条件は、4-1 節において、$3 \to 1, 2 \to 3, 1 \to 2$ とした場合に等しい。したがって、式(29)において、添え字を $3 \to 1, 2 \to 3, 1 \to 2$ のように変換すればよい。すなわち

$$C_{2222} = C_{3333}\ , C_{2211} = C_{3311}\ , C_{2121} = C_{3131} \tag{32}$$

これより、独立な弾性定数は、次式にて与えられる。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\\sigma_{22}\\\sigma_{33}\\\sigma_{23}\\\sigma_{31}\\\sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{1111}&C_{1122}&C_{1122}&0&0&0\\ *&C_{2222}&C_{2233}&0&0&0\\ *&*&C_{2222}&0&0&0\\ *&*&*&C_{2323}&0&0\\ *&*&*&*&C_{3131}&0\\ *&*&*&*&*&C_{3131}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}\\e_{22}\\e_{33}\\2e_{23}\\2e_{31}\\2e_{12}\end{pmatrix} \tag{33}$$

4-3 $x_1 = -x_3^{'}, x_2 = x_2^{'}, x_3 = x_1^{'}$ における独立な弾性定数の決定

この条件は、4-1 節において、$3 \to 2, 2 \to 1, 1 \to 3$ とした場合に等しい。したがって、式(29)において、添え字を $3 \to 2, 2 \to 1, 1 \to 3$ のように変換すればよい。すなわち

$$C_{3333} = C_{1111}\ , C_{3322} = C_{1122}\ , C_{3232} = C_{1212} \tag{34}$$

これより、独立な弾性定数は、次式にて与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ * & C_{2222} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & C_{2323} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & C_{3131} & 0 \\ * & * & * & * & * & C_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \tag{35}$$

以上より、立方晶の弾性定数は次式にて与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & C_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & C_{44} & 0 \\ * & * & * & * & * & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \tag{36}$$

５．正方晶の弾性定数

式(31)(33)(35)より、正方晶軸（回転軸）によって、弾性定数は以下の３種類が存在する。

・正方晶軸x_3方向

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ * & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & C_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & C_{44} & 0 \\ * & * & * & * & * & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \tag{37}$$

・正方晶軸x_1方向

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & C_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & C_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{33} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ * & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & C_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & C_{44} & 0 \\ * & * & * & * & * & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \tag{38}$$

・正方晶軸x_2方向

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ * & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ * & * & C_{11} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & C_{66} & 0 & 0\\ * & * & * & * & C_{55} & 0\\ * & * & * & * & * & C_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ 2e_{23}\\ 2e_{31}\\ 2e_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{13} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ * & C_{33} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ * & * & C_{11} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & C_{44} & 0 & 0\\ * & * & * & * & C_{66} & 0\\ * & * & * & * & * & C_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ 2e_{23}\\ 2e_{31}\\ 2e_{12}\end{pmatrix} \tag{39}$$

６．六方晶の弾性定数

xy 平面上における６０°回転における独立な弾性定数の決定

まず、方向余弦l_{ij}は次式にて与えられる。

$$\begin{bmatrix}l_{11} & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_{11}) & \cos(\theta_{12}) & \cos(\theta_{13})\\ \cos(\theta_{21}) & \cos(\theta_{22}) & \cos(\theta_{23})\\ \cos(\theta_{31}) & \cos(\theta_{32}) & \cos(\theta_{33})\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos(60) & \cos(30) & \cos(90)\\ \cos(150) & \cos(60) & \cos(90)\\ \cos(90) & \cos(90) & \cos(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{40}$$

これより、歪および応力成分の座標変換公式(8)(9)を用いることによって、以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
\sigma'_{11}&=l_{1k}l_{1l}\sigma_{kl}=l_{11}l_{11}\sigma_{11}+l_{11}l_{12}\sigma_{12}+l_{12}l_{11}\sigma_{21}+l_{12}l_{12}\sigma_{22}=\frac{1}{4}\sigma_{11}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_{21}+\frac{3}{4}\sigma_{22}\\
\sigma'_{22}&=l_{2k}l_{2l}\sigma_{kl}=l_{21}l_{21}\sigma_{11}+l_{21}l_{22}\sigma_{12}+l_{22}l_{21}\sigma_{21}+l_{22}l_{22}\sigma_{22}=\frac{3}{4}\sigma_{11}-\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_{12}-\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_{21}+\frac{1}{4}\sigma_{22}\\
\sigma'_{33}&=l_{3k}l_{3l}\sigma_{kl}=l_{33}l_{33}\sigma_{33}=\sigma_{33}\\
\sigma'_{23}&=l_{2k}l_{3l}\sigma_{kl}=l_{21}l_{33}\sigma_{13}+l_{22}l_{33}\sigma_{23}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{13}+\frac{1}{2}\sigma_{23}\\
\sigma'_{13}&=l_{1k}l_{3l}\sigma_{kl}=l_{11}l_{33}\sigma_{13}+l_{12}l_{33}\sigma_{23}=\frac{1}{2}\sigma_{13}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{23}\\
\sigma'_{12}&=l_{1k}l_{2l}\sigma_{kl}=l_{11}l_{21}\sigma_{11}+l_{11}l_{22}\sigma_{12}+l_{12}l_{21}\sigma_{21}+l_{12}l_{22}\sigma_{22}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_{11}+\frac{1}{4}\sigma_{12}-\frac{3}{4}\sigma_{21}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_{22}
\end{aligned} \tag{41}$$

$$
\begin{aligned}
e'_{11} &= l_{1k}l_{1l}e_{kl} = l_{11}l_{11}e_{11} + l_{11}l_{12}e_{12} + l_{12}l_{11}e_{21} + l_{12}l_{12}e_{22} = \frac{1}{4}e_{11} + \frac{\sqrt{3}}{4}e_{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}e_{21} + \frac{3}{4}e_{22} \\
e'_{22} &= l_{2k}l_{2l}e_{kl} = l_{21}l_{21}e_{11} + l_{21}l_{22}e_{12} + l_{22}l_{21}e_{21} + l_{22}l_{22}e_{22} = \frac{3}{4}e_{11} - \frac{\sqrt{3}}{4}e_{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}e_{21} + \frac{1}{4}e_{22} \\
e'_{33} &= l_{3k}l_{3l}e_{kl} = l_{33}l_{33}e_{33} = e_{33} \\
e'_{23} &= l_{2k}l_{3l}e_{kl} = l_{21}l_{33}e_{13} + l_{22}l_{33}e_{23} = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_{13} + \frac{1}{2}e_{23} \\
e'_{13} &= l_{1k}l_{3l}e_{kl} = l_{11}l_{33}e_{13} + l_{12}l_{33}e_{23} = \frac{1}{2}e_{13} + \frac{\sqrt{3}}{2}e_{23} \\
e'_{12} &= l_{1k}l_{2l}e_{kl} = l_{11}l_{21}e_{11} + l_{11}l_{22}e_{12} + l_{12}l_{21}e_{21} + l_{12}l_{22}e_{22} = -\frac{\sqrt{3}}{4}e_{11} + \frac{1}{4}e_{12} - \frac{3}{4}e_{21} + \frac{\sqrt{3}}{4}e_{22}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

新座標系においても、フックの法則は成立するので、$\sigma'_{ij} = C_{ijkl}e'_{kl}$ に式(41)と(42)を代入することにより、次式を得る。なお斜方晶において既に０となっている弾性定数成分は０とおいた。

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= C_{11kl}e'_{kl} \\
&= C_{1111}e'_{11} + C_{1122}e'_{22} + C_{1133}e'_{33} \\
&= C_{1111}\left(\frac{1}{4}e_{11} + \frac{\sqrt{3}}{4}e_{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}e_{21} + \frac{3}{4}e_{22}\right) + C_{1122}\left(\frac{3}{4}e_{11} - \frac{\sqrt{3}}{4}e_{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}e_{21} + \frac{1}{4}e_{22}\right) + C_{1133}e_{33} \\
&= \frac{1}{4}\left(C_{1111} + 3C_{1122}\right)e_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right)e_{12} + \frac{1}{4}\left(3C_{1111} + C_{1122}\right)e_{22} + C_{1133}e_{33} \\
&= \frac{1}{4}\sigma_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{12} + \frac{3}{4}\sigma_{22} \\
&= \frac{1}{4}\left(C_{1111}e_{11} + C_{1122}e_{22} + C_{1133}e_{33}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(C_{1212}e_{12} + C_{1221}e_{21}\right) + \frac{3}{4}\left(C_{2211}e_{11} + C_{2222}e_{22} + C_{2233}e_{33}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(C_{1111} + 3C_{1122}\right)e_{11} + \sqrt{3}C_{1212}e_{12} + \frac{1}{4}\left(C_{1122} + 3C_{2222}\right)e_{22} + \frac{1}{4}\left(C_{1133} + 3C_{2233}\right)e_{33}
\end{aligned}
$$

これより、 $C_{1111} = C_{2222}$, $C_{1133} = C_{2233}$, $C_{1111} - C_{1122} = 2C_{1212}$

また、

$$\sigma'_{12} = C_{12kl}e'_{kl} = 2C_{1212}e'_{12}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}C_{1212}e_{11} - C_{1212}e_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_{1212}e_{22}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_{11} - \frac{1}{2}\sigma_{21} + \frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_{22}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(C_{1111}e_{11} + C_{1122}e_{22} + C_{1133}e_{33}\right) - \frac{1}{2}\left(C_{1212}e_{12} + C_{1221}e_{21}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(C_{2211}e_{11} + C_{2222}e_{22} + C_{2233}e_{33}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(C_{1111} - C_{2211}\right)e_{11} - C_{1212}e_{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-C_{1122} + C_{2222}\right)e_{22} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(C_{2233} - C_{1133}\right)e_{33}$$

これより、 $C_{1111} - C_{1122} = 2C_{1212}$, $C_{2222} - C_{1122} = 2C_{1212}$, $C_{2233} = C_{1133}$

また、

$$\sigma'_{13} = C_{13kl}e'_{kl} = 2C_{1313}e'_{13}$$
$$= C_{1313}e_{13} + \sqrt{3}C_{1313}e_{23}$$
$$= \frac{1}{2}\sigma_{13} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{23}$$
$$= C_{1313}e_{13} + \sqrt{3}C_{2323}e_{23}$$

これより、 $C_{1313} = C_{2323}$

以上より、弾性定数に関する関係式は以下のようになる。

$$C_{1111} = C_{2222}\ ,\ C_{2233} = C_{1133}\ ,\ C_{1313} = C_{2323}\ ,\ C_{1111} - C_{1122} = 2C_{1212} \tag{43}$$

したがって、独立な弾性定数は次式にて与えられる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ * & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & C_{3131} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & C_{3131} & 0 \\ * & * & * & * & * & \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \tag{44}$$

これより、六方晶における独立な弾性定数は５個になり、六方晶の弾性率は最終的に式(45)にて与えられる。

$$
\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ * & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & C_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & C_{44} & 0 \\ * & * & * & * & * & \dfrac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} \tag{45}
$$