

Tsallis エントロピー - と Rényi エントロピー -

by T.Koyama

1 . Tsallis エントロピ - と Rényi エントロピ - の関係

まず Rényi エントロピ - は、

$$I_q[p] = \frac{1}{1-q} \ln \sum_i p_i^q \tag{1}$$

にて与えられる。特に、

$$\begin{aligned} I_1[p] &= \lim_{q \rightarrow 1} \left\{ \frac{-1}{q-1} \ln \sum_i p_i^q \right\} = \lim_{q \rightarrow 1} \left\{ \frac{\ln \sum_i p_i^q}{1-q} \right\} = \lim_{q \rightarrow 1} \left\{ \frac{\left(\ln \sum_i p_i^q \right)'}{(1-q)'} \right\} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \left\{ \frac{(dq) \left(\sum_i p_i^q \ln p_i \right) / \left(\sum_i p_i^q \right)}{-dq} \right\} = - \left\{ \frac{\sum_i p_i \ln p_i}{\sum_i p_i} \right\} = - \sum_i p_i \ln p_i \end{aligned} \tag{2}$$

であり、 $I_1[p]$ は通常の離散的な確率分布に関するエントロピ - (カオスの位相空間ではコルモゴロフエントロピ -) であることがわかる。なおここで、

$$\begin{aligned} y &= a^x \\ \ln y &= x \ln a \\ \frac{1}{y} dy &= dx \ln a \\ dy &= (y \ln a) dx = (a^x \ln a) dx \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} f &= \ln(a^x + b^x + c^x + \dots) \\ \exp f &= a^x + b^x + c^x + \dots \\ df \exp f &= (a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c + \dots) dx \\ \frac{df}{dx} &= (a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c + \dots) \exp(-f) = \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c + \dots}{a^x + b^x + c^x + \dots} \end{aligned}$$

を用いた。さらに一般化次元は Rényi エントロピ - を用いて、

$$D(q) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{-I_1[p]}{\ln l} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\ln l} \right) \left\{ \frac{-1}{q-1} \ln \sum_i p_i^q \right\} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i p_i^q}{\ln l} \tag{3}$$

と与えられ、

$$D(0) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\ln l} \right) \left\{ \ln \sum_i 1 \right\} = \lim_{l \rightarrow 0} \left(- \frac{\ln N_l}{\ln l} \right) \quad : \text{ボックス次元 (} N_l \text{ は } l \text{ 分割微小領域数)}$$

$$D(1) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{-S(1)}{\ln l} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_i p_i \ln p_i}{\ln l} \right) \quad : \text{情報次元} \quad (4)$$

$$D(2) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\ln l} \right) \left\{ -\ln \sum_i p_i^2 \right\} = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \sum_i p_i^2}{\ln l} \right) \quad : \text{相関次元}$$

となり、一般化次元から種々のフラクタル次元を導出することができる。以上から、Rényi エントロピ - は、組織形態の階層構造（特に組織形成において、スケールを越えたフィードバックが存在する場合）を定量的に表現するパラメータであることがわかる。

一方、Tsallis エントロピ - は、

$$S_q[p] = \frac{1}{1-q} \left[\sum_i p_i^q - 1 \right] \quad (5)$$

にて定義される。これは、非平衡非線形熱力学における近年導入された、熱力学的エントロピ - である。Tsallis エントロピ - についての詳細は別紙「非加法的統計力学」を参照していただきたい。

$$\begin{aligned} S_1[p] &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \left[\sum_i (p_i)^q - 1 \right] = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \left[\sum_i p_i (p_i)^{q-1} - 1 \right] = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \left[\sum_i p_i e^{(q-1) \ln p_i} - 1 \right] \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \left[\sum_i p_i \left\{ 1 + (q-1) \ln p_i + \frac{1}{2!} \{(q-1) \ln p_i\}^2 + \frac{1}{3!} \{(q-1) \ln p_i\}^3 + \dots \right\} - 1 \right] \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \left[\sum_i \left\{ p_i + (q-1) p_i \ln p_i + \frac{p_i}{2!} \{(q-1) \ln p_i\}^2 + \frac{p_i}{3!} \{(q-1) \ln p_i\}^3 + \dots \right\} - 1 \right] \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \left[\sum_i p_i + \sum_i (q-1) p_i \ln p_i + \sum_i \frac{p_i}{2!} \{(q-1) \ln p_i\}^2 + \sum_i \frac{p_i}{3!} \{(q-1) \ln p_i\}^3 + \dots - 1 \right] \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \left[\sum_i (q-1) p_i \ln p_i + \sum_i \frac{p_i}{2!} \{(q-1) \ln p_i\}^2 + \sum_i \frac{p_i}{3!} \{(q-1) \ln p_i\}^3 + \dots \right] \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \left[-\sum_i p_i \ln p_i - \sum_i \frac{p_i}{2!} (q-1) \{\ln p_i\}^2 - \sum_i \frac{p_i}{3!} (q-1)^2 \{\ln p_i\}^3 + \dots \right] \\ &= -\sum_i p_i \ln p_i \end{aligned}$$

であり、 $S_1[p]$ もコルモゴロフエントロピ - に一致する。

さて、式(5)より、

$$\sum_i p_i^q = 1 + (1-q)S_q[p] \quad (6)$$

であり、これを式(1)に代入することによって、

$$\begin{aligned}
I_q[p] &= \frac{1}{1-q} \ln \sum_i p_i^q = \frac{1}{1-q} \ln \{1 + (1-q)S_q[p]\} \\
\therefore (1-q)S_q[p] &= \exp\{(1-q)I_q[p]\} - 1 \\
S_q[p] &= I_q[p] + \frac{1}{2!}(1-q)I_q^2[p] + \frac{1}{3!}(1-q)^2 I_q^3[p] + \frac{1}{3!}(1-q)^3 I_q^4[p] + \dots \\
&= I_q[p] \left\{ 1 + \frac{1}{2!}(1-q)I_q[p] + \frac{1}{3!}(1-q)^2 I_q^2[p] + \frac{1}{3!}(1-q)^3 I_q^3[p] + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{7}$$

を得る。したがって、 $q \rightarrow 0$ では $S_1[p] = I_1[p]$ である。物理的に式(7)は、組織形態を表すパラメータである Rényi エントロピ - を用いて、熱力学的パラメータである Tsallis エントロピ - を展開表現したことに他ならない。つまり、通用の熱力学を非平衡非線形に拡張するために Tsallis エントロピ - が導入され、その非平衡非線形の表現形である組織形態を記述するために導入されたパラメータが Rényi エントロピ - であると解釈することができる。したがって、両者に関連性があることは当然であり、また $q \rightarrow 0$ で $S_1[p] = I_1[p]$ である点は、平衡熱力学における組織形態と熱力学的エントロピ - との関係からの要請である。また Rényi エントロピ - が式(1)のように定義された理由は、一般化次元との整合性を重視した結果である。

なお式(6)は Tsallis エントロピ - の物理的意味を考察する際、非常にわかりやすい形式で、特に $q = 1$ の時に、

$$\sum_i p_i^1 = 1 + (1-1)S_1[p] = 1 \tag{8}$$

であることから、Tsallis エントロピ - が、 $q = 1$ から確率変数 p_i がべき的にずれていく点を、補正した量であることが理解できる。